MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Prova P3

1.- Mostre que o número real

$$\alpha = 119 + \sqrt[9871]{11} + 888\sqrt[9871]{11^{750}} + 333\sqrt[9871]{11^{5775}} + 999\sqrt[9871]{11^{8777}}$$

é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e que $\partial\,\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \leq 9871$. **(1.5 pontos)**

2.- Sejam $K \subset L$ uma extensão de corpos e $\alpha \in L$ algébrico sobre K. Mostre que se $[K[\alpha]\colon K]$ é um número ímpar, então $K[\alpha] = K[\alpha^2]$. **(1.5 pontos)**

3.- Seja γ uma raiz do polinômio $f(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e considere o corpo $\mathbb{Z}_2[\gamma]$.

(a) Encontre $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ tais que

$$(\gamma^2 + \gamma)(\gamma^2 + 1) = a + b\gamma + c\gamma^2.$$

(b) Se δ for uma outra raiz de $f(x)$, acontece que $(\delta^2 + \delta)(\delta^2 + 1) = a + b\delta + c\delta^2$ para os mesmos a, b, c anteriores?

(1.5 pontos)

4.- Considere o polinômio $f(x) = x^7 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Encontre $\beta, \xi \in \mathbb{C}$ tais que $\mathrm{Gal}(f(x), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\beta, \xi]$. **(1 ponto)**

(b) Calcule $[\mathrm{Gal}(f(x), \mathbb{Q})\colon \mathbb{Q}]$. **(1.5 pontos)**

5.- Considere o corpo $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}, \sqrt{2}\right]$.

(a) Calcule $[K\colon \mathbb{Q}]$. **(1.5 pontos)**

(b) Encontre uma base de K sobre $\mathbb{Q}$. **(1 ponto)**

(c) Calcule $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}\right] : \mathbb{Q}\right]$. **(1.5 pontos)**

(d) Encontre $\mathrm{irr}\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt{2}, \mathbb{Q}\right)$. **(1 ponto)**