MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Prova P2

1.- Explique brevemente a verdade ou falsidade das seguintes afirmações **(2.8 pontos)**

(a) Sejam I e J ideais de $\mathbb{R}[x]$. Existe um polinômio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $I + J = \mathbb{R}[x]p(x)$.

(b) Um polinômio $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ pode fatorar como $f(x) = a(x)b(x)$ onde $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ com $1 \leq \partial a(x), \partial b(x) < \partial f(x)$ se, e somente se, $f(x)$ for redutível em $\mathbb{Q}[x]$.

(c) O polinômio $2x^6 + 28x^4 + 12x^2 + 20x + 4$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

(d) O polinômio $x^3 - 323x^2 + 1155$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

2.- Faça uma lista (sem repetições) com todos os elementos do anel

$$\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\mathbb{Z}_2[x](x^3 + x^2 + x + 1)}.$$

Nessa lista, identifique o elemento que seja igual a $\overline{x^5 + x^4}$. **(2 pontos)**

3.- Sejam K um corpo e $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ com máximo divisor comum $d(x) \in K[x]$. Dado $h(x) \in K[x]$, mostre que existem polinômios $a(x), b(x) \in K[x]$ satisfazendo a equação

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = h(x)$$

se, e somente se, $h(x)$ é divisível por $d(x)$. **(2 pontos)**

4.- Explique por que os seguintes anéis são ou não são corpos **(2.8 pontos)**

(a) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\mathbb{Q}[x](x^6+30x^5-15x^3+6x-120)}$,

(b) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\mathbb{Q}[x](x^3+4x^2+2x)}$,

(c) $\mathbb{Z}_2[x]$,

(d) $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{\mathbb{Z}_5[x](x^4+1)}$

5.- Encontre um polinômio $p(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ de grau ≤ 2 tal que $\overline{p(x)}$ seja o inverso de $\overline{x^2 + x + 1}$ no corpo

$$\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\mathbb{Z}_3[x](x^3 + x^2 + 2x + 1)}.$$

(2 pontos)