MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Prova P1

1.- Quais dos seguintes anéis são corpos? **(1.5 pontos)**

(a) $\mathbb{Z}_{37}$
(b) $A \times B$ onde A e B são corpos
(c) $M_3(\mathbb{R})$
(d) A/I, onde A é um anel comutativo com elemento unidade e I é um ideal maximal de A

2.- Seja A um anel. Suponha que I e J são ideais de A.

(a) Mostre que $I + J = \{y + z \in A \colon y \in I,\ z \in J\}$ é um ideal de A. **(1 ponto)**
(b) Mostre que $I \cap J$ é um ideal de A. **(1 ponto)**
(c) Sejam m, n inteiros positivos com $\mathrm{mdc}(m, n) = d$. Mostre que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. **(1 ponto)**
(d) Sejam m, n inteiros positivos com $\mathrm{mmc}(m, n) = r$. Mostre que $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$. **(1 ponto)**

3.- (a) Sejam A, B anéis e $f \colon A \to B$ um homomorfismo.
Suponha que S é um subanel de A. Mostre que $h \colon S \to B$, definido por $h(x) = f(x)$ para todo $x \in S$, é um homomorfismo de anéis. **(0.5 pontos)**
(b) Encontre todos os endomorfismos de $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$. **(2 pontos)**

Escolha um único exercício entre os dois seguintes.

4.- Sejam A,B anéis e $f \colon A \to B$ um homomorfismo. Suponha que I é um ideal de A contido em $\operatorname{Ker} f$. Considere a projeção natural $\pi \colon A \to A/I$, $x \mapsto \overline{x}$. **(4 pontos)**

(a) Mostre que existe um único homomorfismo $g \colon A/I \to B$ tal que $f = g \circ \pi$.
(b) Encontre $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} g$.
(c) Qual a relação entre I e $\operatorname{Ker} f$ para que g seja um homomorfismo injetor?

5.- Sejam m e n inteiros positivos tais que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. **(4 pontos)**

(a) Mostre que a função $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, definida por $\varphi(x) = (\overline{x}, \overline{x})$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo.
(b) Mostre que $\operatorname{Ker} \varphi = mn\mathbb{Z}$.
(c) Mostre que $(\overline{1}, \overline{0})$, $(\overline{0}, \overline{1}) \in \operatorname{Im} \varphi$ (*Indicação:* Identidade de Bezout). Deduza que φ é sobrejetor.
(d) Mostre que $\mathbb{Z}_{mn}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.