

MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Prova P1

- 1.- Quais dos seguintes anéis são domínios de integridade? (1.5 pontos)
- (a) \mathbb{Z}_{777}
 - (b) $A \times B$ onde A e B são domínios de integridade
 - (c) $M_3(\mathbb{R})$
 - (d) A/I , onde A é um anel comutativo com elemento unidade e I é um ideal maximal de A
- 2.- Seja A um anel. Suponha que I e J são ideais de A .
- (a) Mostre que $I + J = \{y + z \in A : y \in I, z \in J\}$ é um ideal de A . (1 ponto)
 - (b) Mostre que $I \cap J$ é um ideal de A . (1 ponto)
 - (c) Sejam m, n inteiros positivos com $\text{mdc}(m, n) = d$. Mostre que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. (1 ponto)
 - (d) Sejam m, n inteiros positivos com $\text{mmc}(m, n) = r$. Mostre que $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$. (1 ponto)
- 3.- (a) Sejam A, B anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo.
Suponha que S é um subanel de A . Mostre que $h: S \rightarrow B$, definido por $h(x) = f(x)$ para todo $x \in S$, é um homomorfismo de anéis. (0.5 pontos)
- (b) Encontre todos os endomorfismos de $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. (2 pontos)

Escolha um único exercício entre os dois seguintes.

- 4.- Sejam A, B anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo. Suponha que I é um ideal de A contido em $\text{Ker } f$. Considere a projeção natural $\pi: A \rightarrow A/I, x \mapsto \bar{x}$. (4 pontos)
- (a) Mostre que existe um único homomorfismo $g: A/I \rightarrow B$ tal que $f = g \circ \pi$.
 - (b) Encontre $\text{Ker } g, \text{Im } g$.
 - (c) Qual a relação entre I e $\text{Ker } f$ para que g seja um homomorfismo injetor?
- 5.- Sejam m e n inteiros positivos tais que $\text{mdc}(m, n) = 1$. (4 pontos)
- (a) Mostre que a função $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, definida por $\varphi(x) = (\bar{x}, \bar{x})$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo.
 - (b) Mostre que $\text{Ker } \varphi = mn\mathbb{Z}$.
 - (c) Mostre que $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}) \in \text{Im } \varphi$ (*Indicação:* Identidade de Bezout). Deduza que φ é sobrejetor.
 - (d) Mostre que \mathbb{Z}_{mn} é isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.