MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Lista 5

1.- Sejam $\xi_\lambda = \cos\frac{2\lambda\pi}{n} + i\sin\frac{2\lambda\pi}{n}$ com $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$ as raízes n-ésimas da unidade em $\mathbb{C}$ e seja m um inteiro qualquer. Calcule:

(a) $\xi_0^m + \xi_1^m + \cdots + \xi_{m-1}^m$.

(b) $\xi_0^m \cdot \xi_1^m \cdots \xi_{n-1}^m$.

2.- Seja $\xi \neq 1$ uma raiz n-ésima da unidade. Mostre que ξ é raiz da equação:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0.$$

3.- Seja $p > 1$ um número primo. Mostre que

(a) Toda raiz p-ésima da unidade diferente de 1 é primitiva.

(b) As raízes p^r-ésimas da unidade não primitivas são raízes p^{r-1}-ésimas da unidade.

4.- Seja ξ uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Mostre que ξ^m é uma raiz n-éisma primitiva da unidade, para algum inteiro m, se, e somente se, $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.

5.- (a) Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio em $\mathbb{R}[x]$. Mostre que se $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $f(x)$, então $\overline{\alpha}$ também é raiz de $f(x)$.

(b) Prove que as raízes n-ésimas complexas da unidade diferentes de ±1 são duas a duas conjugadas.

(c) Prove que as raízes n-ésimas primitivas complexas da unidade são duas a duas conjugadas.

6.- Seja ξ uma raiz n-ésima da unidade. Considere o conjunto $P(\xi) = \{m \in \mathbb{Z} \colon \xi^m = 1\}$.

(a) Mostre que $P(\xi)$ é um ideal não nulo de $\mathbb{Z}$. Se $p \in \mathbb{Z}$ é o gerador positivo de $P(\xi)$, então p é chamado de *período de ξ*.

(b) Se ξ é uma raiz primitiva, qual é o seu período?

(c) Mostre que $\xi^m = 1$ se, e somente se, $p \mid m$. Em particular, conclua que $p \mid n$.

(d) Mostre que o período de uma raiz complexa da unidade ξ_λ é precisamente $\frac{n}{\mathrm{mdc}(\lambda,n)}$.

7.- Com as definições do Problema 6, calcule o período da raiz complexa:

(a) décimo segunda da unidade ξ_8.

(b) trigésima da unidade ξ_{12}.

(c) n-ésima da unidade ξ_1.

8.- Sejam $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, respectivamente, raízes primitivas cúbica e oitava da unidade em $\mathbb{C}$. Ache valores para λ e μ, inteiros, de modo que

$$\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ = \omega^\lambda \rho^\mu.$$

Use este resultado para calcular $\cos 15^\circ$ e $\sin 15^\circ$.

9.- Seja $z = \cos\theta + i\sin\theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) z é raiz da unidade.

(b) $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

(c) o conjunto $\{z^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ é finito.

10.- Mostre que os seguintes polinômios são irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$ fazendo alguma mudança de variável.

(a) $x^4 + 1$.

(b) $x^6 + x^3 + 1$.

(c) $x^3 + 3x^2 + 5x + 5$.

(d) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10$.

11.- Seja K um corpo e L uma extensão de K. Seja $S \subset L$ um subconjunto. Mostre que a interseção dos subcorpos de L que contêm K e S é um subcorpo de L que contém K e S.

12.- Mostre que os seguintes números complexos são algébricos sobre $\mathbb{Q}$.
(a) $\sqrt{2}$.
(b) $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
(c) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. (Uma solução: é raiz do polinômio x^4-16x^2+4)
(d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
(e) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. (Uma solução: é raiz do polinômio x^2+x+1)
(f) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$.

13.- Sejam u um elemento algébrico sobre o corpo K, e $a \in K$. Mostre que $a+u$ é algébrico sobre K, encontra $\operatorname{irr}(a+u,K)$ e mostra que o grau de $\operatorname{irr}(a+u,K)$ e o grau de $\operatorname{irr}(u,K)$ é o mesmo.

14.- Sejam $K \subset L$ uma extensão de corpos e $\alpha \in L$. Se $f(x) \in K[x]$ é tal que $f(\alpha)=0$, calcule um polinômio $g(x) \in K[x]$ tal que $g(\alpha^{-1})=0$.

15.- (a) Mostre que $f(x)=x^3+3x+3$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Seja u uma raiz de $f(x)$. Expressa u^{-1} e $(1+u)^{-1}$ na forma $a+bu+cu^2$, onde $a,b,c \in \mathbb{Q}$. (*Solução*: $u^{-1}=-1-\frac{1}{3}u^2$, $(1+u)^{-1}=4-u+u^2$)

16.- Seja $f(x)=x^3-x^2+x+2 \in \mathbb{Q}[x]$
(a) Mostre que $f(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Mostre que se α,β são dois raízes de $f(x)$ então os corpos $\mathbb{Q}[\alpha]$ e $\mathbb{Q}[\beta]$ são isomorfos.
(c) Seja u uma raiz de $f(x)$. Escreva $(u^2+u+1)(u^2-u)$ e $(u-1)^{-1}$ na forma $a+bu+cu^2$, onde $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

17.- Seja p um número primo ≥ 2. Prove que
(a) $\operatorname{Gal}(x^p-1,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\xi]$ onde $\xi^p=1$ e $\xi \neq 1$.
(b) $\mathbb{Q}[\xi]=\{a_0+a_1\xi+\cdots+a_{p-2}\xi^{p-2} \colon a_i \in \mathbb{Q},\ i=1,\ldots,p-2\}$.

18.- Sejam p,q números primos ≥ 2 e α,β definidos por: $\alpha=\sqrt[p]{q} \in \mathbb{R}$ e $u=(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}) \in \mathbb{C}$. Mostre que
(a) $\alpha,\alpha u,\alpha u^2,\ldots,\alpha u^{p-1}$ são as p distintas raízes de $x^p-q \in \mathbb{C}$.
(b) $\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=x^p-q$ e $\operatorname{irr}(u,\mathbb{Q})=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$.
(c) $\operatorname{Gal}(x^p-q,\mathbb{Q})=\left\{\sum_{i,j}\lambda_{ij}\alpha^i u^j \colon \lambda_{ij} \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq p-2\right\}$
(Sugestão: $\operatorname{Gal}(x^p-q,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\alpha,u]$).

19.- Mostre que as seguintes extensões L de $\mathbb{Z}_2$ são corpos de decomposição dos seguintes polinômios $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$.
(a) $f(x)=x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $L=\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\mathbb{Z}_2[x]f(x)}$.
(b) $f(x)=x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $L=\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\mathbb{Z}_2[x]f(x)}$.

20.- Sejam $\alpha=\sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}$ e $\beta=\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \in \mathbb{C}$. Mostre que:
(a) $\mathbb{Q}[\alpha] \cong \mathbb{Q}[\beta]$.
(b) $\operatorname{Gal}(x^3-5,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\alpha,\beta]=\mathbb{Q}[\alpha,\overline{\beta}]=\mathbb{Q}[\beta,\overline{\beta}]$.

21.- Construir $\operatorname{Gal}(f(x),\mathbb{Q})$, o corpo de decomposição sobre $\mathbb{Q}$, dos seguintes polinômios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ e calcular $[\operatorname{Gal}(f(x),\mathbb{Q}) \colon \mathbb{Q}]$.
(a) $f(x)=x^4-3$.
(b) $f(x)=x^5-3$.
(c) $f(x)=x^6-2$.
(d) $f(x)=x^7-5$.

22.- Calcula $[K \colon \mathbb{Q}]$ e encontra uma base sobre $\mathbb{Q}$ da extensão de corpos $\mathbb{Q} \subset K$ onde K é:
(a) $K=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{7}]$.
(b) $K=\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{7}]$.
(c) $K=K=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt[3]{2}]$.
(d) $K=\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}]$.
(e) $K=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{5}]$.

23.- Encontra a dimensão e uma base das sguintes extensões de corpos.
(a) $\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{21}]$ sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.
(b) $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{7}]$ sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.
(c) $\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{7}]$ sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{7}]$.

24.- Se $K \subset L$ é uma extensão de corpos, definimos o conjunto

$$\mathrm{Aut}_K(L) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L)\colon \sigma(a) = a \text{ para todo } a \in K\}.$$

Seja $f(x) \in K[x]$ e $\alpha \in L$ uma raiz de $f(x)$ em L. Prove que $\sigma(\alpha)$ é também uma raiz de $f(x)$ em L para todo $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$.

25.- Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]$. Mostre que $[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] = 3$. Encontre $\mathrm{irr}(\sqrt[6]{2},\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$.

26.- Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]$. Mostre que $[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]\colon \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]] = 2$. Encontre $\mathrm{irr}(\sqrt[6]{2},\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])$.

27.- Sejam K um corpo e $f(x) \in K[x]$ um polinômio de grau > 0. Se L é um corpo de decomposição de $f(x)$ sobre K, mostre que $[L : K] \leq n!$. (*Dica:* Se $\alpha \in L$ é raiz, então $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ e $\partial g(x) = n-1$).

28.- Se $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r = L$ são corpos e $[L : K] < \infty$, mostre que

$$[L\colon K] = [K_r\colon K_{r-1}]\cdots[K_2\colon K_1][K_1\colon K_0].$$

29.- Seja K um corpo de $K \subset L$ uma extensão de corpos tal que $[L\colon K] = p$ é um número primo. Mostre que $L = K[u]$ para todo $u \in L \setminus K$.

30.- Seja K um subcorpo de $\mathbb{C}$. Seja $L = K[\alpha_1,\ldots,\alpha_r]$, onde cada $\alpha_i \in \mathbb{C}$ é algébrico sobre $K_{i-1} = K[\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}]$. Mostre que L é um corpo e $K \subset L$ é uma extensão finita.

31.- Seja $K \subset L$ uma extensão de corpos. Suponha que existem $u,v \in L$ tais que $L = K[u,v]$ e $[K[u]\colon K] = m$, $[K[v]\colon K] = n$ com $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$. Mostre que $[L : K] = mn$.

32.- Mostre que os seguintes polinômios $f(x) \in K[x]$ são irredutíveis sobre K.
(a) $f(x) = x^2+3$; $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.
(b) $f(x) = x^3+8x-2$; $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
(c) $f(x) = x^5+3x^3-9x-6$; $K = \mathbb{Q}[\sqrt{7},\sqrt{5},i]$.
(d) $f(x) = x^{777}+2x^{555}+14x^{111}+1002$; $K = \mathbb{Q}[\sqrt[128]{111}]$.

33.- Entrega: Calcule:
(a) $\big[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]\colon \mathbb{Q}\big]$.
(b) $\big[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},i]\colon \mathbb{Q}\big]$.
(c) $\big[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},i]\colon \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]\big]$.
(d) $\big[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+i]\colon \mathbb{Q}\big]$.