MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Lista 4

1.- Seja K um corpo com um número finito de elementos. Mostre que $K[x]$ possui um número infinito de polinômios irredutíveis. (*Indicação*: mesma prova que para demonstrar que $\mathbb{Z}$ tem um número infinito de primos). Observa que se K é um corpo infinito, o resultado é claro pois $\{x - a \colon a \in K\}$ é um conjunto infinito de irredutíveis.

2.- Entrega. Sejam K um corpo e $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. Se o polinômio $f(x) \in K[x]$ satisfaz

(i) $p_1(x) \mid f(x),\ p_2(x) \mid f(x), \ldots,\ p_m(x) \mid f(x)$;

(ii) Se $g(x) \in K[x]$ é tal que $p_1(x) \mid g(x), \ldots, p_m(x) \mid g(x)$, então $f(x) \mid g(x)$.

dizemos que é um *mínimo múltiplo comum* de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ em $K[x]$.

(a) Mostre que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são mínimo múltiplo comum de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ em $K[x]$, então existe $a \in K \setminus \{0\}$ tal que $f_1(x) = af_2(x)$.

(b) Mostre que se $f(x) \in K[x]$ é um mínimo múltiplo comum de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ e $c \in K \setminus \{0\}$, então $g(x) = cf(x)$ é um mínimo múltiplo comum de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ em $K[x]$.

(c) Mostre que se $f(x) \in K[x]$ é tal que

$$K[x]p_1(x) \cap K[x]p_2(x) \cap \cdots \cap K[x]p_m(x) = K[x]f(x),$$

então $f(x)$ é um mínimo múltiplo comum de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ em $K[x]$.

(d) Seja L uma extensão de K. Sejam $h_1(x) \in K[x]$ o único mínimo múltiplo comum mônico de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ em $K[x]$, e $h_2(x)$ o único mínimo múltiplo comum mônico de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ em $L[x]$. Mostre que $h_1(x) = h_2(x)$.

3.- Seja K um corpo. Dizemos

(a) Sejam $f(x), g(x) \in K[x]$ mônicos não constantes tais que $\mathrm{mdc}(f(x), g(x)) = 1$. Mostre que existe um isomorfismo de anéis

$$\frac{K[x]}{K[x]f(x)g(x)} \cong \frac{K[x]}{K[x]p(x)} \times \frac{K[x]}{K[x]g(x)}\ .$$

(*Indicação*: Mesma prova que em $\mathbb{Z}$. Prova P1)

(b) Use o anterior para provar que se $h(x)$ é um polinômio mônico não constante de $K[x]$ tal que $h(x) = p_1(x)^{n_1} p_2(x)^{n_2} \cdots p_r(x)^{n_r}$ é uma fatoração em mônicos irredutíveis, onde os $p_i(x)$ são distintos, então existe um isomorfismo de anéis

$$\frac{K[x]}{K[x]h(x)} \cong \frac{K[x]}{K[x]p_1(x)^{n_1}} \times \frac{K[x]}{K[x]p_2(x)^{n_2}} \times \cdots \times \frac{K[x]}{K[x]p_r(x)^{n_r}}\ .$$

4.- Seja K um corpo e E uma extensão de K. Sejam $f(x) \in K[x]$ um polinômio irredutível sobre K e $g(x) \in K[x]$ um poliniômio não nulo. Suponha que existe $\alpha \in E$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, i.e. α é raiz de $f(x)$ e $g(x)$. Mostre que $f(x) \mid g(x)$ em $K[x]$. (*Indicação*: $\mathrm{mdc}(f, g)$).

5.- Mostre que se p é um primo e $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$, com $a_n \neq 0$, é irredutível, então $\mathbb{Z}_p[x]/\mathbb{Z}_p[x]f(x)$ é um corpo com p^n elementos.

6.- Encontre todos os polinômios mônicos irredutíveis de grau ≤ 3 em $\mathbb{Z}_2[x]$ e em $\mathbb{Z}_3[x]$.

7.- Encontre o inverso do elemento no corpo dado

(a) $\overline{x^2 - 2x + 1}$ em $\mathbb{Q}[x]/\mathbb{Q}[x](x^3 - 2)$. (*Solução*: $\overline{3x^2 + 4x + 5}$)

(b) $\overline{x}$ em $\mathbb{Z}_5[x]/\mathbb{Z}_5[x](x^2 + x + 1)$. (*Solução*: $\overline{4x + 4}$)

8.- Para quais valores de $a = 1, 2, 3, 4$ é $\mathbb{Z}_5[x]/\mathbb{Z}_5[x](x^2 + a)$ é um corpo?

9.- Para quais valores de $k = 2, 3, 5, 7, 11$ é $\mathbb{Z}_k[x]/\mathbb{Z}_k[x](x^2 + 1)$ é um corpo? (*Solução*: $k = 3, 7, 11$).

10.- Construa corpos com o seguinte número de elementos: 9, 49, 8, 81.

11.- Mostre que os corpos $K_1 = \mathbb{Z}_{11}[x]/\mathbb{Z}_{11}[x](x^2 + 1)$ e $K_2 = \mathbb{Z}_{11}[x]/\mathbb{Z}_{11}[y](y^2 + y + 2)$ são corpos de 121 elementos. Mostre que a função que envia o elemento $\overline{p(x)} \in K_1$ a $\overline{p(y + 1)} \in K_2$ (onde $p(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$) é uma função bem definida e da um isomorfismo de anéis de K_1 em K_2.

12.- Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ um polinômio mônico em $\mathbb{Z}[x]$ com $a_0 \neq 0$. Prove que toda raiz racional de $f(x)$ é inteira e divide a_0.

13.- Decomponha o polinômio $x^4 - 5x^2 + 6$ em produto de fatores irredutíveis sobre os seguintes corpos K:
(a) $K = \mathbb{Q}$.
(b) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
(c) $K = \mathbb{R}$.

14.- Decomponha sobre o corpo $K = \mathbb{Z}_3$ os seguintes polinômios como produto de irredutíveis:
(a) $x^2 + x + 1$;
(b) $x^3 + x + 2$;
(c) $2x^3 + 2x^2 + x + 1$;
(d) $x^4 + x^3 + x + 1$.

15.- Seja K um corpo. Suponha que $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ e que

$$f(x) = up_1(x)^{e_1} \cdots p_n(x)^{e_n} \quad \text{e} \quad g(x) = vp_1(x)^{f_1} \cdots p_n(x)^{f_n}$$

são fatorações de $f(x)$ e $g(x)$ em mônicos irredutíveis, onde $u, v \in K \setminus \{0\}$, os mônicos irredutíveis $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ são todos diferentes e e_i, f_i são inteiros ≥ 0.
(a) Mostre que $d(x) = p_1(x)^{\min(e_1,f_1)} p_2(x)^{\min(e_2,f_2)} \cdots p_n(x)^{\min(e_n,f_n)}$ é o máximo divisor comum de $f(x)$ e $g(x)$ em $K[x]$ (onde $d = 1$ se todos os expoentes $\min(e_i, f_i) = 0$).
(b) Mostre que $h(x) = p_1(x)^{\max(e_1,f_1)} p_2(x)^{\max(e_2,f_2)} \cdots p_n(x)^{\max(e_n,f_n)}$ é o mínimo múltiplo comum de $f(x)$ e $g(x)$ em $K[x]$.
(c) Mostre que $f(x)g(x) = uvd(x)h(x)$.

16.- Sejam K um corpo e $a(x), b(x), c(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. Seja $d(x)$ um máximo divisor comum de $a(x)$ e $b(x)$ em $K[x]$. Mostre que se $a(x)$ divide $b(x)c(x)$ em $K[x]$ então $\frac{a(x)}{d(x)}$ divide $c(x)$ em $K[x]$. (*Indicação*: Quando $d(x) = 1$ foi provado em teoria).

17.- Sejam K um corpo e $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ com máximo divisor comum $d(x) \in K[x]$.
(a) Dado $h(x) \in K[x]$, mostre que existem polinômios $a(x), b(x) \in K[x]$ satisfazendo a equação

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = h(x) \tag{1}$$

se, e somente se, $h(x)$ é divisível por $d(x)$.
(b) Exercício de extensão. Se $a_0(x), b_0(x) \in K[x]$ são soluções particulares da equação (1), mostre que o conjunto completo de soluções da equação (1) é dado por

$$a(x) = a_0(x) + m(x)\frac{g(x)}{d(x)}, \quad b(x) = b_0(x) - m(x)\frac{f(x)}{d(x)},$$

onde $m(x)$ varia entre todos os polinômios de $K[x]$.
(*Indicação:* i) É fácil comprovar que todas as soluções propostas são de fato solução de (1). ii) Suponha que $a(x), b(x)$ são soluções. Então $f(x)(a(x) - a_0(x)) = g(x)(b_0(x) - b(x))$. Agora use o exercício 16).

18.- Prove que os seguintes polinômios $f(x)$ são irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.
(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$;
(b) $f(x) = x^7 - 31$;
(c) $f(x) = x^6 + 15$;
(d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + 25$;
(e) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 + 2x + 5$;
(f) $f(x) = x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 30x + 22$;
(g) $f(x) = x^3 - x + 1$;
(h) $f(x) = x^3 + 2x + 10$;
(i) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 15$;
(j) $f(x) = x^4 + 2$;
(k) $f(x) = x^4 - 2$;
(l) $f(x) = x^4 - x + 1$;

19.- Determine quais dos seguintes polinômios sobre os seguintes corpos K são irredutíveis.

(a) $x^7 + 22x^3 + 11x^2 - 44x + 33, \quad K = \mathbb{Q}$.

(b) $x^3 - 7x^2 + 3x + 3, \quad K = \mathbb{Q}$.

(c) $x^4 - 5, \quad K = \mathbb{Z}_{17}$.

(d) $x^3 - 5, \quad K = \mathbb{Z}_{11}$.

(e) $x^4 + 7, \quad K = \mathbb{Z}_{17}$.

20.- Prove que os polinômios $6x^5 + 14x^3 - 21x + 35$ e $18x^5 - 30x^2 + 120x + 360$ são irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$.