MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Lista 3

1.- Seja K um corpo. Seja $a \in K \setminus \{0\}$. Mostre que $a \mid p(x)$ para todo $p(x) \in K[x]$.

2.- Sejam K um corpo e $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$. Mostre que valem as seguintes propriedades:

(a) Se $g(x) \mid f(x)$ e $h(x) \mid g(x)$, então $h(x) \mid f(x)$.

(b) Se $h(x) \mid f(x)$ e $h(x) \mid g(x)$, então $h(x) \mid (f(x) \pm g(x))$.

(c) Se $g(x) \mid f(x)$, então $(g(x) \cdot h(x)) \mid (f(x) \cdot h(x))$.

(d) Se $g(x) \mid f(x)$ e $f(x) \mid g(x)$, então $f(x) = kg(x)$ para algum $k \in K$.

3.- Seja p um número primo, e seja n um inteiro positivo. Quantos polinômios de grau n existem em $\mathbb{Z}_p[x]$? Quantos de grau no máximo n?

4.- Sejam K um corpo e $c \in K$. Mostre que se $n > 2$ for um inteiro ímpar, então $x + c$ é um fator de $x^n + c^n$.

5.- Calcule a soma e o produto dos polinômios $f(x), g(x) \in K[x]$ nos seguintes casos:

(a) $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{3}x^4 + \bar{2}x + \bar{4}$ onde $K = \mathbb{Z}_5$.

(b) $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{3}x^4 + \bar{2}x + \bar{4}$ onde $K = \mathbb{Z}_7$.

(c) $f(x) = \bar{5}x^3 + \bar{3}x - \bar{4}$, $g(x) = \bar{2}x^2 - x + \bar{3}$ onde $K = \mathbb{Z}_7$.

(d) $f(x) = \bar{7}x^4 - \bar{2}x^2 + \bar{3}$, $g(x) = \bar{3}x^2 + \bar{4}$ onde $K = \mathbb{Z}_{11}$.

6.- Calcule todas as raízes em $\mathbb{Z}_5$ do polinômio $f(x) = x^5 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

7.- Calcule uma outra função polinomial f sobre o corpo $K = \mathbb{Z}_5$ que coincida com a função polinomial $x^2 - x + \bar{1}$ sobre $\mathbb{Z}_5$.

8.- Mostre que a equação $X^2 = \bar{1}$ possui quatro soluções no anel $\mathbb{Z}_{15}$. Não deveria ter só dois? Contradiz isso a teoria?

9.- Seja A um anel comutativo com unidade. Prove que $A[x]$ é também um anel comutativo com unidade.

10.- Prove que se D é um domínio de integridade então $D[x]$ é também um domínio de integridade. Conclua daí que se K é um corpo, então $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é um domínio de integridade.

11.- Sejam D e D' dois domínios isomorfos. Prove que os anéis de polinômios $D[x]$ e $D'[x]$ são isomorfos.

12.- Prove que se F é o corpo de frações de um domínio, D então $F(x)$, o corpo de frações de $F[x]$, é isomorfo a $D(x)$, o corpo de frações de $D[x]$.

13.- Quantas funções, não necessariamente homomorfismos, $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ existem?

14.- Determine $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial q(x)$ e $f(x), g(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 4x + 8$, $g(x) = 2x - 1$. (*Solução*: $q(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $r(x) = 9$.)

(b) $f(x) = x^5 + 1$, $g(x) = x + 1$. (*Solução*: $q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $r(x) = 0$.)

(c) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$, $g(x) = 2x^2 - 5$.

(d) $f(x) = 2x^7 - 5x^6 + 5x^5 - x^3 - x^2 + 4x - 5$, $g(x) = 2x^2 - 5$.

15.- Determine $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial q(x)$ e $f(x), g(x), q(x), r(x) \in K[x]$ onde K é o corpo indicado.

(a) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x + 1$, $K = \mathbb{Z}_2$.

(b) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $K = \mathbb{Z}_5$.

(c) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 + 5$, $K = \mathbb{Z}_7$.

(d) $f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$, $K = \mathbb{Z}_7$.

16.- Encontre o máximo divisor comum dos seguintes $f(x), g(x) \in K[x]$ onde K é o corpo dado.
(a) $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1,\ \ g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1,\ \ K = \mathbb{Q}$. (*Solução*: $x - 1$)
(b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2,\ \ g(x) = 3x^2 + 4x - 1,\ \ K = \mathbb{Q}$. (*Solução*: 1)
(c) $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1,\ \ g(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ \ K = \mathbb{Z}_2$. (*Solução*: $x^2 + 1$)
(d) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x + 2,\ \ g(x) = x^4 + 3x^2 + 3x + 6,\ \ K = \mathbb{Z}_7$. (*Solução*: $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$)

17.- Encontre polinômios $a(x), b(x) \in K[x]$ tais que $a(x)f(x) + b(x)g(x) = \text{mdc}(f(x), g(x))$ para cada par de polinômios $f(x), g(x) \in K[x]$ do exercício 16.
(*Solução de (c)*: $x^2 + 1 = 1 \cdot (x^4 + x^3 + x + 1) + x \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$.)
(*Solução de (d)*: $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 5 \cdot (x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x + 2) + (2x + 1)(x^4 + 3x^2 + 3x + 6)$.)

18.- Sejam K um corpo, $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ e $a \in K \setminus \{0\}$. Prove que $d(x) \in K[x]$ é um máximo divisor comum de $f(x)$ e $g(x)$ em $K[x]$ se, e somente se, $a \cdot d(x)$ é um máximo divisor comum de $f(x)$ e $g(x)$ em $K[x]$.

19.- Nesse exercício queremos provar que no domínio $\mathbb{Z}[x]$ existem ideais I que não podem ser expressos da forma $I = \mathbb{Z}[x] \cdot p(x)$ para algum $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Para isso, mostre que o ideal

$$I = \mathbb{Z}[x] \cdot 2 + \mathbb{Z}[x] \cdot x = \{a(x) \cdot 2 + b(x) \cdot x \colon a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

não é da forma $I = \mathbb{Z}[x] \cdot p(x)$. Se existir $d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $I = \mathbb{Z}[x] \cdot d(x)$, então como $d(x) \mid 2$, e $d(x) \mid x$ temos que $d(x)$ é de grau zero e $d(x) = \pm 1$. Agora mostre que não existem $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tais que $1 = a(x) \cdot 2 + b(x) \cdot x$ pois o termo independente de $a(x) \cdot 2 + b(x) \cdot x$ é par. (Indicação: Veja página 71 do livro do autor Adilson Gonçalves).

20.- Sejam $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ e $K \subset L$ uma extensão do corpo K. Mostre que
(a) $\text{mdc}_{K[x]}(f(x), g(x)) = \text{mdc}_{L[x]}(f(x), g(x))$.
(b) $f(x)$ e $g(x)$ são relativamente primos em $K[x]$ se, e somente se, $f(x)$ e $g(x)$ são relativamente primos em $L[x]$.

21.- Encontre polinômios (genéricos) $p(x)$ de grau 1 tais que:
(a) $\overline{a + bx} \cdot \overline{c + dx} = \overline{p(x)} \in \frac{\mathbb{Q}[x]}{\mathbb{Q}[x](x^2+1)}$. (*Solução*: $p(x) = (ac - bd) + (ad + bc)x$)
(b) $\overline{a + bx} \cdot \overline{c + dx} = \overline{p(x)} \in \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\mathbb{Z}_2[x](x^2+x+1)}$. (*Solução*: $p(x) = (ac + bd) + (ad + bc + bd)x$)

22.- Mostre que todo polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau ímpar ≥ 3 é redutível sobre $\mathbb{R}$. (*Indicação*: Teorema do valor médio).

23.- Mostre que $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$.