MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Lista 2

1.- Mostre que a interseção de ideais de um anel $(A, +, \cdot)$ é também um ideal de A. Mostre também que a interseção de ideais à esquerda (direita) de um anel $(A, +, \cdot)$ é também um ideal à esquerda (direita) de A.

2.- Seja $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de ideais de um anel A. Prove que, se

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots,$$

então $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ é um ideal de A. Mostre com um exemplo que a união de dois ideais pode não ser um ideal.

3.- Sejam I e J dois ideais de um anel $(A, +, \cdot)$. Prove que

(a) $I + J = \{x + y \colon x \in I,\, y \in J\}$ é um ideal de A.

(b) $I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \colon n \in \mathbb{N},\, x_i \in I,\, y_i \in J\}$ é um ideal de A contido em $I \cap J$.

4.- Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Descreva os ideais $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ e $m\mathbb{Z} \cdot n\mathbb{Z}$.

5.- Seja I um ideal à esquerda e J um ideal à direita de um anel $(A, +, \cdot)$. Mostre que $I \cdot J$ é um ideal de A.

6.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel, e sejam $a \in A$ e $I \subseteq A$ um ideal de A.

(a) Mostre que $\mathrm{ann}_l(a) = \{x \in A \colon x \cdot a = 0\}$ é um ideal à esquerda de A.

(b) Mostre que $\mathrm{ann}_r(a) = \{x \in A \colon a \cdot x = 0\}$ é um ideal à direita de A.

(c) Mostre que $\mathrm{ann}_l(I) = \{x \in A \colon x \cdot y = 0 \text{ para todo } y \in I\}$ é um ideal de A.

7.- Seja p um número primo e seja A o subconjunto de $\mathbb{Q}$ definido por

$$A = \left\{\frac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0,\, \mathrm{mdc}(p, n) = 1\right\}$$

(a) Mostre que A é um subanel de $\mathbb{Q}$.

(b) Mostre que $I = \{\frac{m}{n} \in A \colon p \text{ divide } m\}$ é um ideal de A.

(c) Mostre que A/I é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. (Indicação: Mostre que a função $A \to \mathbb{Z}_p$, $\frac{m}{n} \mapsto \bar{m}\bar{n}^{-1}$, é um homomorfismo sobrejetor com núcleo I.)

8.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo, $A \neq \{0\}$, com elemento unidade $1 \in A$, e seja P um ideal de A. Dizemos que P é um *ideal primo* de A se $P \neq A$ e para todos $x, y \in A$ se satisfaz

$$\text{Se } x \cdot y \in P, \text{ então } x \in P \text{ ou } y \in P.$$

(a) P é um ideal primo de A se, e somente se, A/P é um domínio de integridade.

(b) Os únicos ideais primos de $\mathbb{Z}$ são $\{0\}$ e os ideais $p \cdot \mathbb{Z}$ onde p é um número primo.

(c) Se M é um ideal maximal de A então M é um ideal primo de A.

9.- Sejam A e B dois anéis. Considere o anel $A \times B$ (veja exercício 15 da Lista 1).

(a) Mostre que se I é ideal de A e J é ideal de B, então $I \times J = \{(x, y) \in A \times B \colon x \in I,\, y \in B\}$ é um ideal de $A \times B$. Mostre que todos os ideais de $A \times B$ são dessa forma.

(b) Como são os ideais à esquerda (direita) de $A \times B$.

(c) Como são os ideais maximais de $A \times B$?

(d) Como são os ideais primos de $A \times B$?

(e) Encontre os ideais maximais de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

10.- Calcule todos os ideais N de $\mathbb{Z}_{12}$. Em cada caso calcule $\mathbb{Z}_{12}/N$: ou seja, encontre um anel conhecido que seja isomorfo ao quociente $\mathbb{Z}_{12}/N$.

11.- Considere o anel $\mathcal{C}([0, 1]) = \{f \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \colon f \text{ contínua }\}$. Seja $S \subseteq [0, 1]$ um subconjunto do intervalo. Mostre que o conjunto $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \colon f(s) = 0 \text{ para todo } s \in S\}$ é um ideal de $\mathcal{C}([0, 1])$.

12.- Seja $f \colon A \to B$ um homomorfismo e L um ideal de B. Prove que $f^{-1}(L) = \{a \in A \colon f(a) \in L\}$é um ideal de A.

13.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade 1. Se $x \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$ vamos definir nx do seguinte modo:

$$nx = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 0. \\ x, \text{ se } n = 1. \\ x + \cdots + x, \; n \text{ vezes, se } n \geq 2. \\ -x \text{ se } n = -1. \\ (-x) + \cdots + (-x), \; -n \text{ vezes, se } n \leq -2. \end{cases}$$

Mostre que:
(a) $m(x + y) = mx + my$, para todos $m \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in A$.
(b) $(mn)1 = (m1) \cdot (n1)$, para todos $m, n \in \mathbb{Z}$ e $1 \in A$.

14.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade e seja $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$ definida por $\varphi(n) = n1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
(a) Prove que φ é um homomorfismo.
(b) Prove que $\{m \in \mathbb{Z} : m1 = 0 \in A\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.

15.- Seja D um domínio de integridade e seja $\varphi\colon \mathbb{Z} \to D$ definida por $\varphi(n) = n1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.
Se $\ker\varphi = \{0\}$, dizemos que a *característica do domínio D é zero.*
Se $\ker\varphi \neq \{0\}$, existe um único inteiro positivo p tal que $\ker\varphi = p\mathbb{Z}$. Nesse caso deizemos que a*característica do domínio D é p.* Mostre que p é um número primo tal que $px = 0$ para todo $x \in D$.

16.- Seja K um corpo e seja P a interseção de todos os subcorpos de K. Prove que P é o menor subcorpo de K. Chamamos P de *corpo primo* de K.

17.- Seja K um corpo e seja P o corpo primo de K. Mostre que:
(a) Se a característica de K é zero, então P é isomorfo a $\mathbb{Q}$.
(b) Se a característica de K é um número primo p, então P é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.
(c) Prove que se $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q \subseteq K$, com p e q primos, então $p = q$.

18.- Sejam $A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
(a) Mostre que B é um subanel de $M_2(\mathbb{R})$.
(b) Mostre que a função $f\colon A \to B$, definida por

$$f(a + b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix},$$

é um isomorfismo.

19.- Prove que os anéis $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ não são isomorfos.

20.- Prove que os corpos $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ não são isomorfos.

21.- Calcule $\operatorname{End}(\mathbb{Z}[i]) = \{f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i] : f \text{ homomorfismo}\}$ e $\operatorname{Aut}(\mathbb{Q}[i]) = \{f : \mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}[i] : f \text{ isomorfismo}\}$.

22.- Sejam A e B dois anéis. Mostre que $\pi_A\colon A \times B \to A$, definida por $(a, b) \mapsto a$, e $\pi_B\colon A \times B \to B$, definida por $(a, b) \mapsto b$, são homomorfismos de anéis sobrejetivos. Calcule os núcleos de π_A e π_B. Mostre que $(A \times B)/\ker\pi_A$ é isomorfo a A e $(A \times B)/\ker\pi_B$ é isomorfo a B.

23.- Sejam R, A, B anéis. Mostre que uma função $f\colon R \to A \times B$ é um homomorfismo de anéis se, e somente se, $\pi_A \circ f\colon R \to A$ e $\pi_B \circ f\colon R \to B$ são homomorfismos de anéis.

24.- Seja $F\colon \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definida por $F(f) = f(\frac{1}{4})$ para todo $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.
(a) Prove que F é um homomorfismo.
(b) Calcule $\operatorname{im} f$ e $\ker f$.
(c) Identifique o anel $\mathcal{C}([0, 1])/\ker f$. É $\ker f$ um ideal maximal?

25.- Seja $F\colon \mathcal{C}([-1, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1])$ definida pela restrição, ou seja, $F(f)$ é f como função definida em $[0, 1]$.
(a) Mostre que F é um homomorfismo sobrejetor.
(b) Encontre o núcleo $\ker F$ de F.
(c) Mostre que os anéis $\mathcal{C}([0, 1])/\ker F$ e $\mathcal{C}([0, 1])$ são isomorfos.

26.- Sejam $I \subseteq J$ ideais de um anel $(A, +, \cdot)$. Mostre que a correspondência $A/I \to A/J$ definida por $\bar{a} \mapsto \bar{a}$ está bem definida e é um homomorfismo de anéis.
Se m, n são inteiros não nulos, tais que n divide a m, aplica o anterior para obter um homomorfismo de anéis $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$.
Se $I \neq J$, a correspondência $A/J \to A/I$, $\bar{a} \mapsto \bar{a}$, estaria bem definida?

27.- Seja R um domínio de integridade e $Q(R)$ o corpo de frações de R. Mostre que todo automorfismo $\sigma \colon R \to R$ possui uma única extensão a um automorfismo de $Q(R)$.

28.- Exercício para entrega. Data limite 19:20 horas do dia 21 de março de 2019.
Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e $n \geq 1$ um inteiro. Considere o anel de matrizes $M_n(R)$.

(a) Se I for um ideal de A, mostre que $M_n(I) = \{Y = (y_{ij}) \colon y_{ij} \in I \text{ para todo } i, j = 1, \ldots, n\}$ é um ideal de $M_n(A)$.

(b) Suponha que $(B, +, \cdot)$ é um anel e $f \colon A \to B$ um homomorfismo. Se $X = (x_{ij}) \in M_n(A)$, denotamos por $X' = (x'_{ij}) \in M_n(B)$ a matriz onde $x'_{ij} = f(x_{ij})$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Mostre que $F \colon M_n(A) \to M_n(B)$, definida por $F(X) = X'$ também é um homomorfismo.

(c) Seja I um ideal de A. Mostre que os anéis $M_n(A/I)$ e $M_n(A)/M_n(I)$ são isomorfos.