MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Lista 1

1.- Seja p um número primo ≥ 2 e seja $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ o conjunto

$$\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Definimos a soma e o produto em $\mathbb{Z}[p]$ do seguinte modo:

$$(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{p}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z};$$

$$(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) = (ac + pbd) + (bc + ad)\sqrt{p}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

Prove que $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ é um domínio de integridade. É esse domínio de integridade um subanel de $\mathbb{R}$?

2.- Seja p um número primo ≥ 2 e seja $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ o conjunto

$$\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Definimos a soma e o produto em $\mathbb{Q}[p]$ do seguinte modo:

$$(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{p}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q};$$

$$(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) = (ac + pbd) + (bc + ad)\sqrt{p}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

Prove que $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ é um corpo. É esse corpo um subanel de $\mathbb{R}$?

3.- Moste que $\mathcal{C}([0,1]) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \colon f \text{ função contínua } \}$ é um anel comutativo, com elemento unidade e que possui divisores de zero.

Lembre que a soma e o produto estão definidos da seguinte forma: Para $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, $f + g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, para todo $t \in [0,1]$, e $f \cdot g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

4.- Mostre que se $(R, +, \cdot)$ é um anel, então $M_n(R)$, o conjunto das matrizes de tamanho $n \times n$ com entradas em R, é um anel com as seguintes operações de soma e produto definidos como segue. Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(R)$, então $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, ou seja, a entrada (i,j) de $A + B$ é a soma (em R) de a_{ij} com b_{ij}; $A \cdot B = (c_{ij})$, onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$, onde o produto $a_{ik} \cdot b_{kj}$ é o produto em R.
Mostre que se R possui elemento unidade, então R também possui elemento unidade.
Se R for um domínio de integridade (corpo), $M_n(R)$ é também um domínio de integridade (corpo)?

5.- Seja A um anel qualquer. Vamos definir potência de um elemento $x \in A$ (usando a associatividade do produto) do seguinte modo:

$$x^1 = x, \quad x^2 = x \cdot x, \quad \ldots, \quad x^n = x^{n-1} \cdot x, \quad n \geq 2.$$

Também definimos $nx = x + \overset{(n}{\cdots} + x$ para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Prove as seguintes propriedades para todos $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

(a) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$.
(b) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$ se $x \cdot y = y \cdot x$.
(c) $(x^m)^n = x^{mn}$.
(d) Se $x \cdot y = y \cdot x$, então vale o binômio de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i}, \quad \text{onde } \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\, i!} \in \mathbb{Z}.$$

6.- Seja p um número primo ≥ 2 e seja

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \colon \operatorname{mdc}(p, n) = 1 \right\}.$$

Mostre que A é um anel com as operações usuais de fração.

7.- Seja $(D, +, \cdot)$ um domínio de integridade e seja $a \in D$, $a \neq 0$.
(a) Prove que a função $\varphi_a : D \to D$, $x \mapsto a \cdot x$ é injetiva.
(b) Usando (a), mostre que todo domínio de integridade finito é um corpo.

8.- Calcule os disvisores de zero nos seguintes anéis:
$$\mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_{18},\ \mathbb{Z}_{60}.$$

9.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um elemento $e \in A$ é *idempotente* se $e^2 = e$.
(a) Mostre que se $(A, +, \cdot)$ é um anel com elemento unidade 1 e sem divisores de zero, então os únicos elementos idempotentes de A são 0 e 1.
(b) Se $(A, +, \cdot)$ for um domínio de integridade, então a equação $x^2 = x$ só possui as soluções $x = 1$ e $x = 0$.
(c) No anel $M_2(\mathbb{R})$ encontre pelo menos quatro matrizes tais que $A^2 = A$.

10.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel tal que $a^2 = a$ para todo $a \in A$.
(a) Mostre que $a = -a$ para todo $a \in A$.
(b) Mostre que $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo.
O exercício 14 mostra que existem muitos anéis com essas propriedades.

11.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e $x \in A$. Se existir $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $x^n = 0$, dizemos que o elemento x é *nilpotente*.
(a) Dê exemplos de uma inifinidade de elementos nilpotentes em um anel não comutativo. (Indicação: anéis de matrizes).
(b) Prove que se $x, y \in A$ são elementos nilpotentes de A e $x \cdot y = y \cdot x$, então $x \pm y$ é um elemento nilpotente de A. (Indicação: Exercício 5d)
(c) Mostre com um exemplo que a hipótese $x \cdot y = y \cdot x$ é esencial em 11b.
(d) Suponha que $(A, +, \cdot)$ é um anel com elemento unidade e $A \neq \{0\}$. Se $x \in A$ for nilpotente e $x^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, mostre que $1 - x$ é inversível e que $(1-x)^{-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

12.- Seja $(A, +, \cdot)$ um anel com unidade $1 \in A$. Vamos definir duas novas operações no conjunto A, usando as operações $+$ e $\cdot$ de A:
$$a \oplus b = a + b + 1, \qquad a \odot b = a \cdot b + a + b, \quad \text{para todos } a, b \in A.$$
Prove que:
(a) $(A, \oplus, \odot)$ é um anel.
(b) Qual é o elemento zero de $(A, \oplus, \odot)$.
(c) $(A, \oplus, \odot)$ possui elemento unidade? Qual?

13.- Seja R um anel. Defina o *centro* de R como $\mathcal{Z}(R) = \{a \in R \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in R\}$. Mostre que:
(a) $\mathcal{Z}(R)$ é um subanel de R;
(b) Se R for um anel com elemento unidade, então $\mathcal{Z}(R)$ também é e tem o mesmo elemento unidade que R.
(c) Seja R um anel com elemento unidade. Se $x \in R$ for inversível e $x \in \mathcal{Z}(R)$, então $x^{-1} \in \mathcal{Z}(R)$.
(d) $\mathcal{Z}(M_n(R)) = \{zI_n : z \in \mathcal{Z}(R)\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, e onde I_n denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

14.- Seja X um conjunto. Definimos no conjunto das partes de X, indicado por $\mathcal{P}(X)$, as seguintes operações:
$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \qquad A \cdot B = A \cap B,$$
para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$ e onde A^c denota o complementário de A (em X).

Mostre que $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ é um anel comutativo com elemento unidade $1 = X$, elemento neutro para a soma $0 = \{\emptyset\}$, e que $A^2 = A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

15.- Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ dois anéis.

(a) Mostre que $A \times B = \{(a, b) \colon a \in A,\ b \in B\}$ com as operações

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot a', b \cdot b'), \text{ para todos } a, a' \in A, b, b' \in B.$$

(b) Mostre que $A \times B$ tem elemento unidade se, e somente se, A e B possuem elemento identidade.

(c) Mostre que $A \times B$ nunca é um domínio de integridade.

(d) Como são os divisores de zero de $A \times B$?

(e) Como são os elementos nilpotentes de $A \times B$?

(f) Como são os elementos idempotentes de $A \times B$?

16.- Seja $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subanéis de um anel A. Mostre que $B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ é também um subanel de A.

17.- Seja $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subanéis de um anel A. Prove que se

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots$$

então $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ é também um subanel de A.

18.- Seja A um anel e $a \in A$.

(a) Prove que $C(a) = \{x \in A \colon a \cdot x = x \cdot a\}$ é um subanel de A.

(b) Prove que $H(a) = \{x \in A \colon x \cdot a = 0\}$ é um subanel de A.

19.- Seja $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subcorpos de um corpo K. Mostre que $L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ é também um subcorpo de K.

20.- Seja $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subcorpos de um corpo K. Prove que se

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq \cdots$$

então $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ é também um subcorpo de K.

21.- Seja K um corpo e seja P a interseção de todos os subcorpos de K. Mostre que P é um subcorpo de K que está contido em qualquer outro subcorpo de K.

22.- Encontre todos os subanéis de $\mathbb{Z}_{12}$.