MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 4

1.- Sejam $0 \to M_i' \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M_i'' \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, sequências exatas curtas de R-módulos à direita. Mostre que a sequência

$$0 \longrightarrow M_1' \oplus \cdots \oplus M_n' \xrightarrow{\alpha} M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \xrightarrow{\beta} M_1'' \oplus \cdots \oplus M_n'' \longrightarrow 0$$

é exata, onde α e β denotam os homomorfismos induzidos pelos α_i e β_i.

2.- * Seja R um anel e $0 \to A \to B \to C \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos à direita.

(a) Se A e C são finitamente gerados, mostre que B também é finitamente gerado.

(b) Se B é finitamente gerado, mostre que C é finitamente gerado. Mostre com um exemplo que A não precisa ser finitamente gerado.

3.- * Sejam R um anel e $S \subseteq R$ tal que satisfaz as seguintes afirmações (a) $1 \in S$, $0 \notin S$; (b) $SS \subseteq S$; (c) $S \subseteq Z(R)$; (d) Se existirem $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs = 0$, então $r = 0$. Sejam M, N e P R-módulos à direita.

(a) Mostre que todo RS^{-1}-módulo à direita é um R-módulo.

(b) Suponha que Q é um RS^{-1}-módulo à direita. Seja $d\colon M \to Q$ um homomorfismo de R-módulos à direita. Mostre que existe um único homomorfismo de RS^{-1}-módulos $d_S\colon MS^{-1} \to Q$ tal que $d_S\varphi = f$ onde $\varphi\colon M \to MS^{-1}$ é o homomorfismo canônico (Exercício 2 da lista 3). (*Dica:* $d_S(\frac{m}{s}) = d(m)\frac{1}{s}$).

(c) Sejam $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ homomorfismos de R-módulos à direita. Mostre que os homorfismos obtidos no ponto anterior a partir de $M \xrightarrow{f} N \to NS^{-1}$ e $N \xrightarrow{g} P \to PS^{-1}$ coincidem com os homomorfismos do exercício 2(e) da lista 3.

(d) Suponha que $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ é uma sequência exata curta de R-módulos à direita. Mostre que a sequência induzida pelo ponto anterior $0 \to MS^{-1} \to NS^{-1} \to PS^{-1} \to 0$ é exata.

4.- * Seja R um anel e $0 \to A \to B \to F \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos à direita onde F é um R-módulo livre. Mostre que a sequência exata curta anterior cinde.

5.- * Seja R um anel e $e \in R$ um idempotente diferente de 0 e 1.

(a) Mostre que $R = eR \oplus (1-e)R$.

(b) Mostre que se e for central, então eR não é um R-módulo à direita livre.

(c) Sejam A, B R-módulos à direita e $0 \to A \to B \to eR \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Mostre que a sequência exata curta anterior cinde.

6.- Seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de grupos abelianos de ordem (=número de elementos) finita. Suponha que a ordem de A é m e a de B é n e que m e n são coprimos. Mostre que a sequência cinde. (*Dica:* Sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ such that $mr + ns = 1$. Defina $\beta\colon C \to B$ por $\beta(c) = bmr$ onde $g(b) = c$).

7.- * Dado um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"'] & B' \arrow[r, "q"'] & B''
\end{tikzcd}$$

mostre que existe um único homomorfismo de R-módulos fazendo o diagrama aumentado comutativo. Além disso, mostre que se g e h são isomorfismos, então f é um isomorfismo.

8.- Dado um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas,

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "t_2"] & A_3 \arrow[d, "t_3"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \end{tikzcd}$$

(a) Se t_1, t_3, g_1 são injetores, mostre que t_2 é injetor.
(b) Se t_1, t_3, f_2 são sobrejetores, mostre que t_2 é sobrejetor.
(c) Se t_1, t_3 são isomorfismos, g_1 é injetor e f_2 é sobrejetor, mostre que t_2 é um isomorfismo.

9.- * (Lema dos cinco) Considere um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

(a) Se h_2 e h_4 são sobrejetores e h_5 injetor, mostre que h_3 é sobrejetor.
(b) Se h_2 e h_4 são injetores e h_1 é sobrejetor, mostre que h_3 é injetor.
(c) Se h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos, mostre que h_3 é um isomorfismo.

10.- Encontre um exemplo de um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

tal que não exista um homomorfismo de R-módulos à direita $h_3\colon A_3 \to B_3$ fazendo o diagrama comutativo. (Dica: pense em sequências exatas curtas não equivalentes)

11.- Seja $\alpha\colon M \to N$ um homomorfismo de R-módulos à direita. Definimos o *conúcleo* de α como o R-módulo quociente $\operatorname{coker}\alpha = N/\operatorname{im}\alpha$ (junto com a projeção canônica $N \to N/\operatorname{im}\alpha$).

Mostre que os homomorfismos de R-módulos à direita $\alpha\colon L \to M$ e $\beta\colon M \to N$ induzem a sequência exata

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta\alpha \to \ker\beta \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to 0$$

12.- (Lema da cobra) Esse resultado é importante em álgebra homológica. Considere o seguinte diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita tal que as duas linhas são exatas.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\nu'"] & N \arrow[r, "\nu"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Construa um *homomorfismo conetor* $\delta\colon \ker\alpha'' \to \operatorname{coker}\alpha'$ como segue: dado $y \in \ker\alpha''$, escolha $m \in M$ tal que $\mu(m) = y$ e observa que $\alpha(m) = \nu'(n')$ para algum $n' \in N'$. Então defina $\delta(y) = \overline{n'} \in \operatorname{coker}\alpha'$.

Mostre que δ é um homomorfismo de R-módulos bem definido tal que a seguinte sequência de homomorfismos de R-módulos é exata

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\alpha' \arrow[r] & \ker\alpha \arrow[r] & \ker\alpha'' \arrow[dll, "\delta"] & \\ & \operatorname{coker}\alpha' \arrow[r] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{coker}\alpha'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$