(1) (a)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & c_2 - c_1 & \cdots & c_k - c_1 & \cdots & c_n - c_1 \\ 0 & c_2^2 - c_2 c_1 & \cdots & c_k^2 - c_k c_1 & \cdots & c_n^2 - c_n c_1 \\ 0 & c_2^i - c_2^{i-1} c_1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & c_2^{n-1} - c_2^{n-2} c_1 & \cdots & c_k^{n-1} - c_k^{n-2} c_1 & \cdots & c_n^{n-1} - c_n^{n-2} c_1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
$L_n \to L_n - c_1 L_{n-1}$
$L_{n-1} \to L_{n-1} - c_1 L_{n-2}$
$\vdots$
$L_i \to L_i - c_1 L_{i-1}$
$\vdots$
$L_2 \to L_2 - c_1 L_1$

$$= \det\begin{pmatrix} c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & \cdots & c_k - c_1 & \cdots & c_n - c_1 \\ c_2^2 - c_2 c_1 & c_3^2 - c_3 c_1 & & c_k^2 - c_k c_1 & & c_n^2 - c_n c_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_2^{n-1} - c_2^{n-2} c_1 & c_3^{n-1} - c_3^{n-2} c_1 & \cdots & c_k^{n-1} - c_k^{n-2} c_1 & \cdots & c_n^{n-1} - c_n^{n-2} c_1 \end{pmatrix} =$$

Desenvolvimento 1ª coluna

$$= \det\begin{pmatrix} c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & \cdots & c_n - c_1 \\ (c_2 - c_1) c_2 & (c_3 - c_1) c_3 & \cdots & (c_n - c_1) c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ (c_2 - c_1) c_2^{n-2} & (c_3 - c_1) c_3^{n-2} & \cdots & (c_n - c_1) c_n^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{j=2}^{n} (c_j - c_1) \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_2^2 & c_3^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ c_2^{n-2} & c_3^{n-2} & \cdots & c_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
$c_2 - c_1$ mult. coluna 1
$c_j - c_1$ mult. coluna $j-1$
$\vdots$
$c_n - c_1$ mult. coluna $n-1$

(1) Aplicando hipótese de indução obtemos que $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ c_2^{n-2} & c_3^{n-2} & \cdots & c_n^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{2\le i<j\le n} (c_j - c_i)$

Logo o determinante procurado é

$$\prod_{j=2}^{n} (c_j - c_1) \prod_{2\le i<j\le n}^{n} (c_j - c_i) = \prod_{1\le i<j\le n} (c_j - c_i)$$

(b) Como $K_m[t]$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita, temos de $\dim K_m[t]^* = \dim K_m[t]$ que é $m+1$. Logo para provar que $\mathcal{B}$ é base, é suficiente provar que $\mathcal{B}$ é l.i.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in K$ tais que $\alpha_1 \tau_1 + \cdots + \alpha_{m+1}\tau_{m+1} = 0$.

Vamos avaliar $0 = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \tau_i$ em $1, t, \ldots, t^m$ e obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m+1} = 0 \\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{m+1} a_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_1^m + \alpha_2 a_2^m + \cdots + \alpha_{m+1} a_{m+1}^m = 0 \end{cases}$$

Logo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1})$ é solução do sist. homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{m+1}^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Pelo Item (a), como $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ são diferentes temos que

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_{m+1}^m \end{pmatrix} \neq 0,$$ e a única solução do sistema é $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m+1} = 0$.

2 (a) Sabemos que existe um homomorfismo de K-álgebras $K[t] \to L(V)$ definido por $p(t) \mapsto p(T)$, logo para quaisquer polinômios $u(t), v(t) \in K[t]$ temos que $u(T)v(T) = v(T)u(T)$.

Seja $v \in \operatorname{Ker} p(T)$ e consideremos $q(T)(v)$. Temos que

$$p(T)(q(T)(v)) = (p(T)q(T))(v) = (q(T)p(T))(v) = q(T)(p(T)(v)) \underset{v \in \operatorname{Ker} p(T)}{=} q(T)(0) = 0$$

Assim $q(T)(v) \in \operatorname{Ker} p(T)$ e $\operatorname{Ker} p(T)$ é $q(T)$-invariante.

(b) Como $p(t)$ e $q(t)$ são coprimos, existem $a(t), b(t) \in K[t]$ tais que $a(t)p(t) + b(t)q(t) = 1$. Avaliando em T, temos que

$$a(T)p(T) + b(T)q(T) = I.$$

Como $\operatorname{Ker} p(T)$ é $a(T), b(T), q(T), p(T)$-invariante temos que

$$\underbrace{a(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)} \, p(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)}}_{0} + b(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)} \, q(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)} = I_{\operatorname{Ker} p(T)} \Rightarrow b(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)} \, q(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)} = I_{\operatorname{Ker} p(T)} = q(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)} \, b(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)}$$

$\Rightarrow q(T)|_{\operatorname{Ker} p(T)}$ ~~bijetora~~ é isomorfismo.

(3) Como AB diagonalizável, temos que o polinômio mínimo de AB é da forma $(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$ onde $\lambda_i \in K$ são diferentes.

Assim temos que $(AB-\lambda_1 I)(AB-\lambda_2 I)\cdots(AB-\lambda_k I) = 0$

~~Mas~~ como A é invertível podemos conjugar essa igualdade por A, ou seja

$$A^{-1}(AB-\lambda_1 I)(AB-\lambda_2 I)\cdots(AB-\lambda_k I)A = A^{-1} 0 A = 0$$

$$\parallel$$

$$A^{-1}(AB-\lambda_1 I)A\,A^{-1}(AB-\lambda_2 I)A \cdots A^{-1}(AB-\lambda_k I)A = 0$$

$$\parallel$$

$$(BA-\lambda_1 I)(BA-\lambda_2 I)\cdots(BA-\lambda_k I) = 0$$

Logo temos que BA satisfaz um polinômio ~~...~~ que produto de fatores lineares diferentes e o polinômio mínimo de BA divide $(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$ e é portanto da forma $(t-\lambda_{i_1})\cdots(t-\lambda_{i_s})$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ diferentes $\Rightarrow$ BA é diagonalizável

~~Logo ...~~

(Aplicando o mesmo raciocínio a BA pode-se provar que o polinômio mínimo de AB e BA é o mesmo)

Outro jeito: Existe $P \in M_n(K)$ invertível tal que $P^{-1}ABP = D$ com D diagonal

$$D = P^{-1}ABP = P^{-1}ABAA^{-1}P = (A^{-1}P)^{-1}BA(A^{-1}P) \Rightarrow BA \text{ é diagonalizável}$$

4) $C_T(t) = (t-1)^3(t-2)^5$ O bloco correspondente ao autovalor 2 tem tamanho 3
O bloco correspondente ao autovalor 2 tem tamanho 5

$\dim(\ker(T-2I)) = 2$ ~~quer dizer que~~ existem dois blocos de Jordan elementares associados ao 2

$\dim(\ker(T-I)) = 2$ existem 2 blocos de Jordan elementares associados ao 1

Logo o bloco associado a 1 tem que ser da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A condição $\dim(\ker(T-2I)^3) \neq \dim(\ker(T-2I)^2)$ nos diz que pelo menos existe pelo menos um bloco de tamanho ≥ 3, mas isso não adiciona nada novo.

Tamanho 5 e dois blocos elementares, temos as possibilidades

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim as possíveis formas de Jordan de T são

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou }$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 2 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 2 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

5

(5) $\det(tI-[T]_B) = \det\begin{pmatrix} t-3 & -5 & 10 & -10 \\ -4 & t-3 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & t-3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & t-3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - 2L_3}{=} \det\begin{pmatrix} t-3 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & t-3 & -2(t-3) & 0 \\ -2 & 0 & t-3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & t-3 \end{pmatrix} =$

$= (t-3)\det\begin{pmatrix} t-3 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & t-3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & t-3 \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + 2C_2}{=} (t-3)\det\begin{pmatrix} t-3 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & t-3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$

$= (t-3)\det\begin{pmatrix} t-3 & 0 & -10 \\ -2 & t-3 & -5 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} = (t-3)^2 \det\begin{pmatrix} t-3 & 0 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix} = (t-3)^4$

Logo o polinômio característico de T é $c_T(t) = (t-3)^4$ ← Como as raízes do pol. caract. estão no corpo, existe forma de Jordan.

$[T]_B - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $([T]_B - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 0$

O polinômio mínimo de T é $m_T(t) = (t-3)^2$ ⇒ Existe um bloco de Jordan elementar de tamanho 2

$\dim(\mathrm{Ker}(T-3I)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}\,\mathrm{Ker}(T-3I)) = 4 - 2 = 2$ ⇒ Existem 2 blocos elementares de Jordan

↑ é fácil ver da matriz $[T]_B - 3I$ que só tem 2 colunas l.i.

Existem 2 blocos elementares e como ~~onde~~ existe um bloco elementar de tamanho 2, então temos que a forma de Jordan é

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Procuramos base de $Ker\,(T-3I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} y - 2z = 0 \\ 2x + 5w = 0 \end{matrix}$$

$$Ker\,(T-3I) = \langle (0,2,1,0)_B, (5,0,0,-2)_B \rangle$$

Procuramos v tal que $(T-3I)(v) = (0,2,1,0)_B$ e v' tal que $(T-3I)(v') = (5,0,0,-2)_B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} y - 2z = 0 \\ 4x + 10w = 2 \\ 2x + 5w = 1 \\ -2y + 4z = 0 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 5 & -10 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 10 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 5 & -10 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$v = (-2, 0, 0, 1)_B$$

$$v' = (0, 3, 1, 0)_B$$

Logo a base $\mathcal{C} = \left((0,2,1,0)_{\mathcal{B}}, (-2,0,0,1)_{\mathcal{B}}, (5,0,0,-2)_{\mathcal{B}}, (0,3,1,0)_{\mathcal{B}} \right)$

é tal que $[T]_{\mathcal{C}} = J$. Assim a matriz de mudança de base

$$[I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ é tal que

$$\left([I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\right)^{-1} [T]_{\mathcal{B}} [I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = J \qquad \text{Logo } P = [I]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

(b) A matriz de T^t na base $\mathcal{B}^*$ é

$$[T^t]_{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \\ -10 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que toda matriz em forma de Jordan é semelhante à sua transposta logo a forma de Jordan de T^t é a mesma que a de T

(em geral uma matriz é sempre semelhante à sua transposta mas no momento da prova só tínhamos provado isso para as matrizes em forma de Jordan)

8

Forma de Jordan de T^t é $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Sabemos que se $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = H^t = H^{-1}$

e $H \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Assim temos que

$$P^{-1} [T]_\beta P = J$$

$$P^t [T]_\beta^t (P^{-1})^t = J^t = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$P^t [T^t]_{\beta^*} (P^{-1})^t = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\cancel{[T^t]_{\beta^*} (P^{-1})^t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} P^t [T^t]_{\beta^*} (P^t)^{-1} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} P^t [T^t]_{\beta^*} \left(\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} P^t \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} P^t}$$

6 (a) O polinômio característico de N é de grau ≤ 3.
Como N é nilpotente este tem que ser $c_T(t) = t^3$.
Logo $N^3 = 0$.

Outra forma $0 \subsetneq_T \operatorname{Ker} T \subsetneq_T \operatorname{Ker} T^2 \subsetneq_T \cdots \subsetneq_T \operatorname{Ker} T^n = V$ onde n é índice de nilpot.
Como a cadeia é ~~estrita~~ estritamente crescente, e $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ tem que $\operatorname{Ker} T^3 = \mathbb{C}^3$.

(b) Podemos usar o binómio de Newton pois I, N, N^2 comutam.

$$A^n = \left(I + \frac{1}{n}N + \frac{1-n}{2n^2}N^2\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(I + \frac{1}{n}N\right)^{n-i} \left(\frac{1-n}{2n^2}N^2\right)^i$$

se $i > 1$ $\rightarrow$ $N^{2i} = 0$

$$= \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} \left(I + \frac{1}{n}N\right)^{n-i} \left(\frac{1-n}{2n^2}N^2\right)^i = \left(I + \frac{1}{n}N\right)^n + n\left(I + \frac{1}{n}N\right)^{n-1} \frac{1-n}{2n^2}N^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{n}N\right)^i + \cancel{n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{n}N\right)^i \left(\frac{1-n}{2n^2}N^2\right)^i} = n\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{n}N\right)^i\right) \frac{1-n}{2n^2}N^2$$

se $i \geq 1$ aparece N^3 e dá zero

$$= I + n \cdot \frac{1}{n}N + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2}N^2 + n \cdot \frac{(1-n)}{2n^2}N^2$$

$$= I + N + \frac{n(n-1)}{2n^2}N^2 + \frac{n(1-n)}{2n^2}N^2 = I + N$$

(c) Como o corpo $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado A possui forma de Jordan. Logo existe uma matriz $P \in M_3(\mathbb{C})$ invertível tal que $P^{-1}AP = J$ onde J denota a forma de Jordan de A.

- Se $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$ onde $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{C}$ (podem ser iguais) então tomando $\underbrace{\text{raízes } n\text{-ésimas}}_{a,\,b,\,c}$ de λ, μ, η tem que

$$\left(P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}P^{-1} = PJP^{-1} = A$$

- Se $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, Observe que $\lambda \neq 0$ pois A é invertível. Assim tem que

$$P^{-1}\lambda^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = I + N$$

Pelo anterior $I+N$ possui uma raiz n-ésima, R

Logo se α é uma raiz n-ésima de λ tem que

$$\left(P\,\alpha R P^{-1}\right)^n = P\alpha^n R^n P^{-1} = P\lambda(I+N)P^{-1} = PJP^{-1} = A$$

- Se $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ Fazemos mistura dos dois argumentos. Mas observe que precisamos encontrar raiz de $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I+N$, mas $I+\frac{1}{n}N$ é raiz.
Encontramos raiz R de $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e a raiz de μ

$$\left(P\begin{pmatrix} R & \\ & a \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = PJP^{-1} = A.$$