MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista 5

1. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que se T^2 tem um vetor cíclico v, i.e. $V = Z_{v,T^2}$, então T tem um vetor cíclico, i.e. $V = Z_{v,T}$. Vale a recíproca?
2. Seja V um K-espaço vetorial e $T\colon V \to V$ um operador linear com polinômio mínimo $m_T(t) = p_1(t)^{e_1} \cdots p_r(t)^{e_r}$ onde os $p_i(t)$ são distintos e irredutíveis em $K[t]$. Seja $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ a decomposição de V dada pelo teorema da decomposição primária. Mostre que para todo subespaço T-invariante W de V temos que $W = \bigoplus_{i=1}^{r} (W \cap V_i)$.
3. Seja K um corpo, V um K espaço vetorial e $T\colon V \to V$ um operador linear. Sejam $p(t) \in K[t]$ um polinômio irredutível e n um inteiro positivo. Suponha que existe $v \in V$ tal que $m_{v,T}(t) = p(t)^n$. Seja $w \in Z_{v,T}$.
   (a) Mostre que $w = u(T)p(T)^l(v)$ onde $u(t) \in K[t]$ coprimo com $p(t)$ e $0 \leq l \leq n$.
   (b) Mostre que $Z_{w,T} = Z_{p(T)^l(v),T}$. Logo os únicos subespaços T-cíclicos de $Z_{v,T}$ são $0 = Z_{p(T)^n(v),T} \subset Z_{p(T)^{n-1}(v),T} \cdots \subset Z_{p(T)(v),T} \subset Z_{v,T}$.
   (c) Mostre que todo subespaço T-invariante de $Z_{v,T}$ é T-cíclico, ou seja, da forma $Z_{p(T)^l(v),T}$ com $0 \leq l \leq n$.
4. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$.
   (a) Prove que se existe um vetor cíclico para T então todo subespaço próprio T-invariante de V também tem um vetor cíclico.
   (b) Vale a recíproca do item (a)? (Isto é, se todo subespaço próprio T-invariante W de V tem um vetor cíclico para T_W, é verdade que existe um vetor cíclico para T?)
5. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ um operador diagonalizável. Mostre que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, T tem n autovalores distintos.
6. Prove que duas matrizes de ordem 3 são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal.
7. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$.
   (a) Prove que $\operatorname{Im} T$ tem um complementar T-invariante se, e somente se, $\operatorname{Im} T \cap \ker T = 0$.
   (b) Se $\operatorname{Im} T \cap \ker T = 0$, prove que $\ker T$ é o único complementar de $\operatorname{Im} T$ que é T-invariante.
8. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear tal que
$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Seja $W = \ker(T - 2I)$. Prove que W não tem nenhum complementar T-invariante.

9. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma racional.

10. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Encontre vetores $v_1, \cdots, v_r$ que satisfazem as condições do Teorema da Decomposição Cíclica.

11. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que T tem um vetor cíclico se, e somente se a seguinte afirmação é verdadeira: "Todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T."

12. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que todo vetor não nulo $v \in V$ é um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível em $K[t]$.

13. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Suponha que o polinômio minimal de T é igual ao polinômio característico de T e é uma potência de um polinômio irredutível. Prove que nenhum subespaço não trivial T-invariante de V tem um complementar que também é T-invariante.

14. Determine a forma racional R da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = R$.

15. Seja $T \in L(\mathbb{R}^4)$ um operador linear tal que $t^2 + 3$ é um divisor do polinômio minimal de T e 1 é o único autovalor de T. Quais são as possíveis a formas racionais de T?

16. Determine quais das matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 13 & -16 & 2 & -1 \\ -9 & -13 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Encontre a forma de Jordan real J da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e a matriz P tal que $P^{-1}AP = J$.

18. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo K. Seja $f \in \mathbb{K}[t]$ um polinômio mônico, irredutível e de grau $d \geq 1$.
   (a) Suponha que $d|n$. Prove que existe $T \in L(V)$ tal que o polinômio minimal de T é f.
   (b) Se $T \in L(V)$ é tal que seu polinômio minimal tem grau d e é irredutível em $K[t]$, é verdade que $d|n$? Justifique.

19. Determine o número de matrizes não semelhantes A em $M_8(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$(A^2 + 2I)^3 = 0.$$

20. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $A^2 + I = 0$. Prove que $n = 2k$ e que A é semelhante à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

onde $I \in M_k(\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

21. Seja $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que se A e B são semelhantes sobre o corpo dos números complexos, então elas são também semelhantes sobre $\mathbb{R}$.

22. Seja V um K-espaço vetorial e $T\colon V \to V$ um operador linear. Dizemos que um subespaço W de V é T-*admissível* se W satisfaz:
   - W é T-invariante.
   - Para todo $f(t) \in K[t]$, se existir $v \in V$ com $f(T)(v) \in W$, então existe $w \in W$ tal que $f(T)(v) = f(T)(w)$.

   (a) Mostre que se U é um subespaço de V T-invariante tal que possui um complemento também T-invariante, então U é T-admissível. Portanto, todos os $Z_{v_i,T}$ que aparecem aparecem na decomposição cíclica e racional, e suas somas diretas, são T-admissíveis.
   (b) Mostre o recíproco. Todo subespaço T-admissível possui um complemento T-invariante. (*Dica:* Usando o exercício 2, mostre que o problema pode ser reduzido ao caso em que $V = \ker p(T)^n$ com $p(t)$ irreduzível. Trabalhe como no teorema da decomposição cíclica.)

23. Sejam K um subcorpo do corpo F, n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(K)$. Mostre que existe $P \in M_n(K)$ invertível tal que $P^{-1}AP = B$ se, e somente se, existe $Q \in M_n(F)$ invertível tal que $Q^{-1}AQ = B$.