MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista 4 (Provisional)

1. Sejam $T_1, \ldots, T_n \colon V \to V$ operadores lineares diagonalizáveis onde V é um espaç de dimensão finita $n \geq 1$. Mostre que eles diagonalizam simultaneamente se, e somente se, $T_i T_j = T_j T_i$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Prove que duas matrizes de ordem 3 sobre um corpo algebricamente fechado são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal.

3. Sejam N_1 e N_2 matrizes de ordem 6 nilpotentes. Suponha que elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Prove que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado não é verdadeiro para matrizes de ordem 7.

4. Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais de ordem 6 com polinômio minimal $(t-1)^2(t+1)(t-2)$.

5. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes de ordem 6 nilpotentes.

6. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = J$.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão n, com $n \geq 2$ e seja T um operador linear em V de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de T.

8. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(p(t)) = p(t+1)$.
   (a) Determine a forma de Jordan de T.
   (b) Se $n = 4$, encontre uma base B de $P_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B$ esteja na forma de Jordan.

9. Determine o número de matrizes não semelhantes A em $M_6(\mathbb{R})$ satisfazendo
$$(A - 2I)^3 = 0.$$

10. Seja $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômio característico
$$p_T(t) = (t-a)^3(t-b)^3,$$
polinômio minimal
$$m_T(t) = (t-a)^2(t-b)$$
e $a \neq b$. Determine a forma ~~racional~~ e a forma de Jordan de T.

11. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes reais de ordem 7 com polinômio característico $p_T(t) = (t-1)^4(t-2)^2(t+1)$.

12. ~~Considere a matriz real~~

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

~~Determine a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz $P \in M_5(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = J$.~~

13. Dê a forma de Jordan de um operador linear $T\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ com polinômio característico $c_T(t) = (t-1)^2(t-2)^4(t-3)$ e tal que $\dim(\ker(T-2I)) = 2$, $\dim(\ker(T-I)) = 1$ e $\ker(T-2I)^3 \neq \ker(T-2I)^2$.

14. Dê a forma de Jordan da seguinte matriz $A \in M_7(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

15. Seja $N \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente tal que $\dim \ker(N) = k$, $0 < k < n$.
    (a) Mostre que $\dim \ker(N^l) \leq kl$, para todo $l \geq 1$.
    (b) Prove que $n \leq kr$, onde r é o grau do polinômio minimal de N.

16. Encontre a forma de Jordan de uma matriz $A \in M_{14}(\mathbb{R})$ a partir dos seguintes dados

	Posto de $(A-\lambda I)$	Posto de $(A-\lambda I)^2$	Posto de $(A-\lambda I)^3$	Posto de $(A-\lambda I)^4$	Posto de $(A-\lambda I)^5$
$\lambda = 1$	11	10	9	9	9
$\lambda = 2$	12	10	10	10	10
$\lambda = 3$	12	11	10	9	9