MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista 3

1. Seja V um K-espaço de dimensão finita n e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Mostre que se T tem n autovalores distintos então T é diagonalizável.
2. Sejam V um K-espaço de dimensão finita, $T \in L(V)$ e $\lambda \in K$ um autovalor de T. Chamamos de *multiplicidade algébrica* de λ ao maior inteiro m tal que $(t-\lambda)^m$ divida o polinômio característico $p_T(t)$ de T. A dimensão do autoespaço $V_T(\lambda)$ é a *multiplicidade geométrica* de λ.
   (a) Mostre que a multiplicidade geométrica de λ é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ.
   (b) Mostre que T é diagonalizável se, e somente se, $p_T(t)$ é produto de fatores lineares e, para cada autovalor λ de T, as multiplicidades algébrica e geométrica de λ coincidem.
3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{2013}.
4. Seja $A = \begin{bmatrix} 13/2 & -5/2 & 5/2 \\ -5/2 & 13/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Encontre $B \in M_2(\mathbb{Q})$ tal que $B^2 = A$.
5. Supondo que $x_1 = 0$ e $y_1 = -1$, resolva o sistema de equações
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + 6y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n - 3y_n \end{cases}$$
6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear inversível. Prove que:
   (a) Se λ é um valor próprio de T, então $\lambda \neq 0$.
   (b) λ é um valor próprio de T se, e somente se, λ^{-1} é um valor próprio de T^{-1}(onde T^{-1} é o operador inverso de T).
   (c) Se λ é um valor próprio de T, mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.
7. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in L(V)$ de posto 1. Prove que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.
8. Sejam $A, B, X, Y \in M_n(K)$.
   (a) Prove que se $I - AB$ é inversível, então $I - BA$ é inversível e que
$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$
   (b) Prove que XY e YX têm os mesmos autovalores em K. Elas têm o mesmo polinômio característico? E o minimal?
9. Seja $D \in M_n(K)$ uma matriz diagonal com polinômio característico
$$p_D(t) = (t - c_1)^{d_1} \cdots (t - c_k)^{d_k},$$
em que $c_1, \cdots, c_k$ são distintos. Seja
$$W = \{A \in M_n(K) : DA = AD\}.$$
Prove que $\dim W = d_1^2 + \cdots + d_k^2$.

10. Seja $D \in L(P_n(\mathbb{R}))$ o operador derivação. Encontre o polinômio minimal de D.

11. Seja n um inteiro positivo e seja $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_n$ os (não necessariamente distintos) autovalores de A quando considerada como uma matriz de $M_n(\mathbb{C})$. Mostre que $\sum_{i=1}^n c_i$ e $\prod_{i=1}^n c_i$ são números racionais.

12. Determine o polinômio minimal de cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

13. Seja K um corpo e $A_1, \ldots, A_n$ matrizes quadradas sobre K. Suponha que $c_i(t)$ é o polinômio característico de A_i e $m_i(t)$ o polinômio mínimal de A_i, $i = 1, \ldots, n$. Seja B a matriz triangular por blocos

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix}$$

Mostre que o polinômio característico de B é $c(t) = c_1(t) \cdots c_n(t)$. Mostre que não é verdade que o polinômio mínimo de B seja $m(t) = m_1(t) \cdots m_n(t)$.

14. Sejam K um corpo e $A, B \in M_n(K)$ matrizes semelhantes.
    (a) Mostre que os polinômios característicos de A e B coincidem.
    (b) Mostre que os polinômios minimais de A e B coincidem.
    (c) Existem matrizes com os mesmos polinômios característico e minimal que não são semelhantes. Considere as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix}$. Mostre que o polinômio característico das duas matrizes é $(t-1)^4$. Mostre que o polinômio minimal das duas matrizes é $(t-1)^2$. Suponha que A_1 é semelhante com A_2 e que P é uma matriz invertível de tamanho 4×4 tal que $A_2 = P^{-1}A_1P$. Se $P = (p_{ij})$ e $P^{-1} = (q_{ij})$, então temos que $P^{-1}A_1P = \begin{bmatrix} 1+q_{12}p_{11} & q_{12}p_{12} & q_{12}p_{13} & q_{12}p_{14} \\ q_{22}p_{11} & 1+q_{22}p_{12} & q_{22}p_{13} & q_{22}p_{14} \\ q_{32}p_{11} & q_{32}p_{12} & 1+q_{32}p_{13} & q_{32}p_{14} \\ q_{42}p_{11} & q_{42}p_{12} & q_{42}p_{13} & 1+q_{42}p_{14} \end{bmatrix}$ Logo igualando os elementos das posições $(2,1)$, $(2,3)$ e $(4,3)$ das duas expressões de A_2 temos que $q_{22}p_{11} = 1$, $q_{22}p_{13} = 0$, $q_{42}p_{13} = 1$, mas isso é impossível. Portanto as matrizes A_1 e A_2 não são semelhantes para nenhum corpo K.

15. Seja K um corpo de característica diferente de 2 e $T : M_n(K) \to M_n(K)$ o operador linear definido por $T(A) = A^t$. Mostre que T é diagonalizável, determine os autovalores de T, as dimensões dos autoespaços e uma base de $M_n(K)$ formada por autovetores de T.

16. Seja $A \in M_n(K)$ e $T_A : M_n(K) \to M_n(K)$ o operador definido por $T_A(M) = AM - MA$. Prove que se A é diagonalizável então T_A é diagonalizável.

17. Seja $T \in L(V)$ um operador linear tal que todo subespaço de V é T-invariante. Mostre que T é um múltiplo do operador identidade.

18. Seja $C \in M_n(K)$ a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Prove que o polinômio característico de C é $p_C(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$. Mostre que este é também o polinômio minimal de C. A matriz C é chamada de *matriz companheira do polinômio* $c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1} + t^n$.

19. Mostre que uma matriz $A \in M_n(K)$ é inversível se, e somente se, o termo constante de seu polinômio minimal é diferente de zero.

20. Seja $A \in M_n(K)$ uma matriz inversível. Mostre que existe um polinômio $p(t) \in K[t]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

21. Seja $T \in L(V)$ um operador diagonalizável e seja W um subespaço de V T-invariante. Prove que a restrição de T a W, $T|_W \in L(W)$, é diagonalizável.

22. Seja $T \in L(V)$ um operador linear e seja W um subespaço de V. Prove que W é T-invariante se, e somente se, W^0 é T^t-invariante.

23. Sejam K um corpo, n um inteiro positivo e $A \in M_n(K)$ uma matriz de posto $r \leq n$. Mostre que o polinômio minimal de A é de grau $\leq r + 1$.

24. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e seja $T \in L(V)$. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, para todo subespaço T-invariante W de V existe um subespaço T-invariante U tal que $V = W \oplus U$.
Observação: Um operador linear T é *semi-simples* quando todo subespaço T-invariante de V tem um complemento que é também T-invariante.

25. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in L(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (a) T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$.
    (b) $T^{n+1} = T$.

26. Determine todas as matrizes $A \in M_2(\mathbb{R})$ nilpotentes e calcule $\det(A + I)$ e $\det(A - I)$.

27. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $T\colon V \to V$ o operador linear definido por

$$T(e_1) = e_2 - e_1, \quad T(e_2) = e_3 - e_1, \quad T(e_3) = e_3 - e_2.$$

    (a) Mostre que T não é diagonalizável.
    (b) Calcule T^{212}. (*Dica*: Usa o Teorema de Cayley-Hamilton)

28. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T\colon V \to V$ um operador linear. Mostre que T sempre possui um subespaço T-invariante não nulo de dimensão ≤ 2. Prova isso de duas formas diferentes usando o teorema de decomposição primária e usando a complexificação.