MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista 2

1. Sejam $A, B, C \in M_n(K)$. Prove que
$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = (-1)^n \det(A)\det(C).$$

2. Seja K um corpo e $A_1, \dots, A_n$ matrizes quadradas sobre K. Seja B a matriz triangular por blocos
$$B = \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix}$$
Mostre que $\det B = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_n)$.

3. Seja K um corpo, e $a, b, c, d, e, f, g \in K$. Mostre que
$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0.$$

4. Sabendo que os números inteiros 23028, 31882, 86469, 6327 e 61902 são todos múltiplos de 19, mostre que o número inteiro $\det \begin{bmatrix} 2&3&0&2&8 \\ 3&1&8&8&2 \\ 8&6&4&6&9 \\ 0&6&3&2&7 \\ 6&1&9&0&2 \end{bmatrix}$ é múltiplo de 19.

5. Seja K um corpo e $a, b, c \in K$. Usando a matriz $\begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ calcula $\det \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$.

6. Calcule o determinante das matrizes
$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{bmatrix}.$$

7. Seja K um corpo e $a, b, c, d \in K$. Mostre que
$$\det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

8. Calcule o determinante da matriz de Vandermonde, isto é, prove que
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i).$$

9. Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $K_n[x]$ o conjunto de polinômios de grau menor o igual que n com coeficientes em K. Sejam $t_1, \dots, t_{n+1} \in K$ diferentes dois a dois. Considere as funções de avaliação $\tau_i \colon K_n[x] \to K$, $\tau_i(p(t)) = p(t_i)$, $i = 1, \dots, n+1$.
   (a) Mostre que $\mathcal{B} = \{\tau_1, \dots, \tau_{n+1}\}$ é uma base de $K_n[t]^*$. *Indicação*: Exercício 8.
   (b) Mostre que os *polinômios de Lagrange*
   $$L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = 1, \dots, n+1,$$
   é uma base dual de $\mathcal{B}$.
   (c) Mostre que para quaisquer $a_1, \dots, a_{n+1} \in K$ existe um único polinômio $p(t)$ de grau menor o igual que n tal que $p(t_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n+1$.

10. Sejam $A, B \in M_n(K)$. Mostre que se A é inversível então existem no máximo n escalares c tais que $cA + B$ não é inversível.

11. Sejam $A, B, C, D \in M_n(K)$ com D inversível.
   (a) Mostre que $\det \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] = \det(AD - BD^{-1}CD)$.
   (b) Se $CD = DC$, mostre que $\det \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] = \det(AD - BC)$. O que acontece quando D não é inversível?
   (c) Se $DB = BD$, calcula $\det \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$.

12. Seja K um corpo e n um inteiro positivo. Dadas matrizes $A, B \in M_n(K)$ mostre que $\det \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}\right] = \det(A + B)\det(A - B)$.

13. Seja $n > 1$ um inteiro e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\mathcal{C}^{(n-1)}(I; \mathbb{R})$ o conjunto das funções de classe $n-1$, i.e. deriváveis $n-1$ vezes com derivada $n-1$ contínua. Dadas $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I; \mathbb{R})$, o *Wronskiano de* $f_1, \dots, f_n$ é a função $W(f_1, \dots, f_n) \colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto W(f_1, \dots, f_n)(t)$, definida como
   $$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \det \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$
   Mostre que se existir $t \in I$ tal que $W(f_1, \dots, f_n)(t) \neq 0$ então $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathcal{C}^{(n-1)}(I; \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$-linearmente independente.
   Observa que o recíproco não é certo. Por exemplo, seja $I = (-1, 1)$ e $f_1 \colon t \mapsto t^3$ e $f_2 \colon t \mapsto |t^3|$. O conjunto $\{f_1, f_2\}$ é $\mathbb{R}$-linearmente independente, mas $W(f_1, f_2)(t) = 0$ para todo $t \in (-1, 1)$.

14. Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $A \in M_n(K)$.
   (a) Mostre que se A for uma matriz simétrica, então $\operatorname{Adj} A$ também é simétrica.
   (b) Mostre que se A for uma matriz triangular, então $\operatorname{Adj} A$ também é triangular.
   (c) Se $c \in K$, mostre que $\operatorname{Adj}(cA) = c^{n-1} \operatorname{Adj}(A)$.
   (d) Mostre que $\operatorname{Adj}(A^t) = (\operatorname{Adj}(A))^t$.

15. Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(K)$. Se A e B forem invertíveis, mostre que $\operatorname{Adj}(AB) = (\operatorname{Adj} B)(\operatorname{Adj} A)$. (*Comentário:* O resultado também é certo se A ou B não são invertíveis.)

16. Seja K um corpo e n um inteiro positivo. Sejam $A, P \in M_n(K)$ invertíveis. Mostre que $\operatorname{Adj}(P^{-1}AP) = P^{-1}\operatorname{Adj}(A)P$. (*Comentário:* Se A não for invertível o resultado ainda é verdadeiro.)

17. Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $A \in M_n(K)$.
    (a) Mostre que $\det(\operatorname{Adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$ se $n \geq 2$.
    (b) Se A for inversível, mostre que $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}(A)) = A$ se $n = 2$, e que $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj} A) = (\det(A))^{n-2}A$ se $n > 2$. (*Comentário:* O resultado também é certo se A não for inversível.)
    (c) Se A for inversível e definimos $\operatorname{Adj}_1(A) = \operatorname{Adj}(A)$ e $\operatorname{Adj}_{k+1}(A) = \operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}_k(A))$, mostre que $\operatorname{Adj}_k(A) = \det(A)^{\frac{(n-1)^k-(-1)^k}{n}} A^{(-1)^k}$ e que $\det(\operatorname{Adj}_k(A)) = \det(A)^{(n-1)^k}$.

18. Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão finita n. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ e $\mathcal{C} = (d_1, \ldots, d_n)$ duas bases de V. Sejam φ a única forma n-linear tal que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$ e ψ a única forma n-linear tal que $\psi(d_1, \ldots, d_n) = 1$. Qual o valor de $\psi(e_1, \ldots, e_n)$ e de $\varphi(d_1, \ldots, d_n)$? Use isso para dar uma relação entre φ e ψ.

19. Seja K um corpo, E um K-espaço vetorial de dimensão finita n e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ um base de E. Seja $T\colon E \to E$ uma transformação linear. Considere a função $T^{\#}\colon A_r(E) \to A_r(E)$, $f \mapsto T^{\#}f$, onde $T^{\#}f\colon E \times \cdots \times E \to K$ é definida por $T^{\#}f(v_1 \ldots, v_r) = f(T(v_1), \ldots, T(v_r))$.
    (a) Mostre que $T^{\#}$ é uma transformação linear.
    (b) Quando $n = r$, $A_n(V)$ tem dimensão 1. Logo $T^{\#}$ é multiplicação por um escalar. Definimos $\det T$ como o escalar $\alpha \in K$ tal que $T^{\#}f = \alpha f$. Mostre que essa definição coincide com a nossa definição de determinante. *Indicação:* Seja φ a única forma n-linear alternada tal que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Qual a relação entre $T^{\#}\varphi$ e φ?

20. Seja K um corpo e V um K-espaço vetorial de dimensão finita n. Sabemos que se $f \in L_r(V)$ então
$$\varphi_f = \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) f_\sigma,$$
onde $f_\sigma(v_1, \ldots, v_r) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)})$, é uma forma r-linear alternada.
    (a) Mostre que a correspondência $L_r(V) \to A_r(V)$ é uma transformação linear.
    (b) Se f é n-linear e alternada, mostre que $\varphi_f = n!f$.

21. Sejam $E_1, \ldots, E_r$ espaços vetoriais de dimensões $n_1, \ldots, n_r$ respectivamente sobre um corpo K. Defina a função r-linear $f\colon E_1 \times \cdots \times E_r \to K$ e prove que o conjunto dessas funções r-lineares, indicado por $L(E_1, \ldots, E_r; K)$, é um espaço vetorial de dimensão $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$.

22. Sejam E um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K e $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de E. Para cada sequência crescente $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\}$ de r inteiros de 1 até n, seja escolhido um $a_J \in K$. Prove que existe uma (única) forma r-linear alternada $f\colon E \times \cdots \times E \to K$ tal que $f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_r}) = a_J$ para toda sequência $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$. Conclua que o espaço vetorial $A_r(E)$ tem dimensão igual a $\binom{n}{r}$.

23. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita n. Dados os funcionais lineares $f_1, \ldots, f_r \colon E \to K$, defina a forma r-linear alternada $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \colon E \times \overset{(r}{\cdots} \times E \to K$ pondo $f(v_1, \ldots, v_r) = \det(f_i(v_j))$.
    (a) Prove que $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \neq 0$ se, e somente se, $f_1, \ldots, f_r$ são linearmente independentes.
    (b) Prove que se $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset E^*$ é uma base então as formas $f_J = f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_r}$, para todo $J = \{j_1 < \cdots < j_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$, constituem uma base para $A_r(E)$.
    (c) Fixada uma base $\mathcal{B}$ de V e $f_1, \ldots, f_n$ a base dual $\mathcal{B}^*$. De acordo com o anterior, quê base de $A_r(K)$ obtemos?

24. *Extensão:* Nos exercícios 15, 16 e 17, supusemos que certas matrizes fossem inversíveis, mas os enunciados são verdadeiros sem essa suposição. Neste exercício vamos provar isso.
    Seja K um corpo e considere o anel de polinômios $L = K[x_{ij} \colon i, j = 1, \ldots, n]$ em n^2 variáveis $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ e seu corpo de frações $K(x_{ij} \colon i, j = 1, \ldots, n)$.
    (a) A matriz $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$ é invertível em $K(x_{ij} \colon i, j = 1, \ldots, n)$. Portanto, os resultados são verdadeiros para essa matriz.
    (b) Observa que $\operatorname{Adj}(X) \in L$.
    (c) Dada uma matriz $A \in M_n(K)$, $A = (a_{ij})$, existe um homomorfismo de K-álgebras $h \colon L \to K$ tal que $x_{ij} \mapsto a_{ij}$. Observa que $h(\det(X)) = \det(A)$, e $h(X_{ij}) = A_{ij}$ onde X_{ij} e A_{ij} denotam os determinantes das matrizes obtidas a partir de X e A eliminando a linha i e a coluna j.
    (d) Observa que h induz um homomorfismo de K-álgebras $\varphi \colon M_n(L) \to M_n(K)$, $Y = (y_{ij}) \mapsto (h(y_{ij}))$.
    (e) Mostre que $\varphi(\operatorname{Adj}(X)) = \operatorname{Adj}(A)$ e $\varphi(\operatorname{Adj}_k(X)) = \operatorname{Adj}_k(A)$.
    (f) Para o exercício 15, considera o anel de polinômios $K[x_{ij}, y_{ij}]$ com $2n^2$ variáveis.