MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista de Revisão 2

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Vamos definir a *complexificação* $V_{\mathbb{C}}$ de V.
   - Como conjunto, $V_{\mathbb{C}} = V \times V$. Um elemento de $V_{\mathbb{C}}$ é um par ordenado (u, v), onde $u, v \in V$, mas o expressaremos como $u + iv$.
   - A soma em $V_{\mathbb{C}}$ é definida por
   $$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$
   para $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$.
   - A comultiplicação por escalar complexo é definida por
   $$(a + bi)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$
   para $a, b \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$.

   Mostre que
   (a) $V_{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.
   (b) Se $\{v_t\}_{t \in T}$ é uma base de V (como $\mathbb{R}$-espaço vetorial), então $\{v_t = v_t + i0\}_{t \in T}$ é uma base $V_{\mathbb{C}}$ (como $\mathbb{C}$-espaço vetorial). Logo a dimensão de $V_{\mathcal{C}}$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial é a mesma que a dimensão de V como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.
   (c) $V_{\mathbb{C}}$ é também de forma natural um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Qual a dimensão de $V_{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial?
   (d) Seja U um $\mathbb{C}$-subespaço de $V_{\mathbb{C}}$. Existe um $\mathbb{R}$-subespaço S de V tal que
   $$U = S_{\mathbb{C}} = \{s + it \colon s, t \in S\}$$
   se, e somente se, U é fechado sob a conjugação complexa $\chi \colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ definida por $\chi(u + iv) = u - iv$.

2. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $T \colon V \to V$ um operador linear. A *complexificação* de T, denotada por $T_{\mathbb{C}}$, é o operador $T_{\mathbb{C}} \in L(V_{\mathbb{C}})$ definido por $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = T(u) + iT(v)$ para $u, v \in V$. Mostre que
   (a) $T_{\mathbb{C}}$ é de fato um operador $\mathbb{C}$-linear.
   (b) Se $T, T' \in L(V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(\alpha T)_{\mathbb{C}} = \alpha T_{\mathbb{C}}$, $(T + T')_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} + T'_{\mathbb{C}}$, $(T'T)_{\mathbb{C}} = T'_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$.
   (c) Suponha que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Pelo exercício anterior $\mathcal{B}$ é também uma base de $V_{\mathbb{C}}$. Mostre que $[T]_{\mathcal{B}} = [T_{\mathbb{C}}]_{\mathcal{B}}$.
   (d) Seja $R \in L(V_{\mathbb{C}})$. Mostre que R é uma complexificação, ou seja, R é da forma $T_{\mathbb{C}}$ se, e somente se, R comuta com a conjugação complexa $\chi \colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ definida por $\chi(u + iv) = u - iv$.

3. Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre um corpo infinito K. Mostre que V não é uma união de um número finito de subespaços próprios. (Theorem 1.2 do Roman).

   Use isso para provar que se V tem dimensão finita e $S_1, \ldots, S_r$ são subespaços de V da mesma dimensão, então existe um subespaço W de V tal que $V = S_i \oplus W$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Ou seja, W é um complemento commum de todos os subespaços S_i.

4. Seja V um K-espaço de dimensão finita. Mostre que a função $T \mapsto T^t$ é um isomosfismo de $L(V)$ em $L(V^*)$.

5. *Lei modular.* Seja V um espaço vetorial. Sejam S, T, U subespaços de V. Mostre que se $U \subseteq S$, então
$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U).$$

6. Para quais espaços vetoriais V acontece que a lei distributiva de subespaços
$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U)$$
é verdadeira para todos os subespaços S, T, U de V?

7. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$. Determine T^t e uma base de $\ker T^t$ para os seguintes operadores lineares T de V:
   (a) $T =$ operador derivação em V.
   (b) $T(p(t)) = p(t+1)$, para todo $p \in V$.

8. Seja V um K-espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V. Prove:
   (a) O Segundo Teorema do Isomorfismo:
$$\frac{U + W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}.$$
   (b) O Terceiro Teorema do Isomorfismo: Se $U \subset W$,
$$\frac{V}{W} \cong \frac{V/U}{W/U}.$$

9. Mostre que
   (a) $W \oplus U = W' \oplus U'$ e $W \cong W' \not\Rightarrow U \cong U'$.
   (b) $V \cong V'$, $V = W \oplus U$ e $V' = W \oplus U' \not\Rightarrow U \cong U'$.

10. Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Suponha que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ e $S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ com $S_i \subseteq V_i$ subespaços de V para todo $i = 1, \ldots, n$. Mostre que
$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \cdots \oplus \frac{V_n}{S_n}.$$

11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V. Sejam $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{C}^*$ as correspondentes bases duais. Qual a relação entre as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e $[I]_{\mathcal{B}^*\mathcal{C}^*}$?

12. (a) Encontre uma forma explícita da base de $(\mathbb{R}^4)^*$ que é dual à base
$$\{(4, 5, -2, 11), (3, 4, -2, 6), (2, 3, -1, 4), (1, 1, -1, 3)\}.$$
   (b) Determine a base de $\mathbb{R}^4$ cuja base dual é $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ onde
$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, w) &= 2x - y + z, \\ f_2(x, y, z, w) &= -x - 2z, \\ f_3(x, y, z, w) &= -2x + 2y + z, \\ f_4(x, y, z, w) &= -8x + 3y - 3z + w. \end{aligned}$$

13. Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre um corpo K. Sejam $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ transformações lineares. Mostre que $(ST)^t = T^t S^t$.
Mostre que se T for um isomorfismo, então $(T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$.

14. Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in (\mathbb{R}^n)^*$. Mostre que o conjunto solução C das inequações lineares

$$\varphi_1(x) \geq 0, \ldots, \varphi_n(x) \geq 0$$

satisfaz as propriedades
   (a) Se $x, y \in C$, então $x + y \in C$;
   (b) Se $x \in C$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, então $tx \in C$.

   Mostre que se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de $(\mathbb{R}^n)^*$ então

$$C = \{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n; t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0\}$$

   onde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ dual à base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

15. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ dado por $W = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$. Encontre uma base de W^0.

16. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V. Identificando V e V^{**}, mostre que $W = W^{00}$.

17. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita, W um subespaço de V e Y subespço de V^*. As seguintes duas condiçoes são equivalentes? E se V não for de dimensão finita?
   (a) $Y = W^0$.
   (b) $W = \bigcap\limits_{f \in Y} \ker f$.

18. Seja K um corpo e $A, B, \in M_n(K)$. Mostre que se A e B são semelhantes então $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$. São as matrizes complexas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 1+i \\ 4+i & 1+i & 0 \\ 1+i & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-i \\ 3-i & 1+i & 0 \\ 1 & 27 & 1-i \end{pmatrix}$ semelhantes?

19. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam $f, g \in V^*$ funcionais lineares satisfazendo $f(v)g(v) = 0$ para todo $v \in V$. Mostre que f ou g é o funcional linear zero.

20. Seja V um espaç vetorial e $f\colon V \to V$ um operador linear. Seja W um subespaç de V tal que $f(W) \subseteq W$. Mostre que $T_f\colon V/W \to V/W$, $T_f(\overline{v}) = \overline{f(v)}$ é um operador linear. Considere o operador linear $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (x,x,x)$. Descreva operador linear induzido $T_f\colon \mathbb{R}^3/\ker f \to \mathbb{R}^3/\ker f$.

21. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Considere o sistema homogêneo $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Seja $W = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n :$ solução do sistema homogêneo anterior $\}$. Qual a relação entre $\mathbb{R}^n/W$ e soluções do sistema $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

22. Seja K um corpo. Considere o K-espaço vetorial $V = \prod\limits_{i=1}^{\infty} K$ e considere o espaço vetorial $W = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} K$ como subespaço de V da forma natural. Mostre que V/W tem dimensão infinita.

23. Sejam V e U K-espaços vetoriais. Seja W um subespaço de V e $\pi\colon V \to V/W$ a projeção canônica. Mostre que a função $L(V/W, U) \to L(V, U)$, $T \mapsto T\pi$, é injetora.