MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista de Revisão

1. Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo. Prove também que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial e exiba uma base desse espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Mais geralmente: mostre que se L e K são corpos tais que $K \subset L$ então L é um K-espaço vetorial.

2. Seja V um K-espaço vetorial e seja $\{u, v, w\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Determine condições sobre K para que o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também seja linearmente independente.

3. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V sobre um corpo K. Recorde que o *subespaço de V gerado por S* é definido por
$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in S\},$$
isto é, $\langle S \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em S.
   (a) Mostre que $\langle S \rangle$ é um subespaço de V.
   (b) Seja W a interseção de todos os subespaços de V que contêm S. Prove que $W = \langle S \rangle$.

4. Mostre que um subconjunto B de um espaço vetorial é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de B for linearmente independente.

5. Sejam W_1, W_2 subespaços de um espaço vetorial V.
   (a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser um subespaço de V.
   (b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.
   (c) Mostre que $W_1 + W_2$ é o subespaço de V gerado por $W_1 \cup W_2$.

6. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes de 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$:
$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$
   (a) Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Encontre as dimensões de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

7. Seja $\mathcal{F} = \{S_i : i \in I\}$ uma família de subespaços distintos de um K-espaço vetorial V. Mostre que são equivalentes:
   (i) Para cada $i \in I$, $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$.
   (ii) O vetor nulo não pode ser escrito como uma soma de vetores não nulos, cada um pertencendo a um subespaço distinto de $\mathcal{F}$.
   (iii) Todo vetor não nulo de $\sum_{i \in I} S_i$ tem, a menos da ordem, uma decomposição única como soma de vetores não nulos $v = s_1 + \cdots + s_n$, com os vetores $s_1, \ldots, s_n$ pertencendo a subespaços distintos de $\mathcal{F}$.

   (Segue deste exercício que uma soma $V = \sum_{i \in I} S_i$ é direta se, e somente se, uma das condições (i)–(iii) é satisfeita.)

8. Seja V um K-espaço vetorial e seja S um subconjunto linearmente independente de V. Mostre que, se $v \in V$ não for combinação linear de elementos de S, então $S \cup \{v\}$ é linearmente independente.

9. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e sejam U e W subespaços de V tais que $V = U + W$. Mostre que $V = U \oplus W$ se, e somente se, $\dim V = \dim U + \dim W$.

10. Seja V um K-espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Mostre que W possui complemento em V, isto é, que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$.

11. Sejam U e V K-espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear.
    (a) Prove que T é injetora se, e somente se, T leva todo subconjunto linearmente independente de U em um subconjunto linearmente independente de V.
    (b) Prove que se o subconjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ de V for linearmente independente, então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de U.

12. Sejam U e V K-espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (i) T é um isomorfismo.
    (ii) T é sobrejetora.
    (iii) T é injetora.

13. Sejam U e V K-espaços e seja $T\colon U \to V$ um isomorfismo. Mostre que $T^{-1}\colon V \to U$ também é linear e, portanto, é um isomorfismo.

14. Seja V um K-espaço vetorial e seja T um operador linear de V tal que $T^2 = T$ (um operador com essa propriedade é chamado de *projeção*). Mostre que $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

15. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja T um operador linear de V. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (i) $\ker T^2 = \ker T$;
    (ii) $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$;
    (iii) $\ker T \oplus \operatorname{Im} T = V$;
    (iv) $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$;
    (v) $\ker T + \operatorname{Im} T = V$.

16. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\operatorname{posto}(T^2) = \operatorname{posto}(T)$. Prove que $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

17. Seja V um K-espaço vetorial e sejam $S, T \in L(V)$. Mostre que
$$T(\ker(S \circ T)) = \ker S \cap \operatorname{Im} T.$$

18. Seja K um corpo de característica diferente de 2. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão 2 e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Prove que ou $T = I$, ou $T = -I$, ou existe uma base B base de V tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observa que se a característica de K é 2, o resultado não é válido pois fixada uma base B existe $T\colon V \to V$ tal que, por exemplo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K de característica diferente de 2 e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Sejam $W = \{v \in V : T(v) = v\}$ e $U = \{v \in V : T(v) = -v\}$. Prove que $V = W \oplus U$.

20. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão n e seja T um operador linear em V tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$. Prove que o conjunto

$$B = \{v, T(v), T^2(v), ..., T^{n-1}(v)\}$$

é uma base de V. Qual é a matriz $[T]_B$?

21. Sejam $f_1, \ldots, f_m \in (K^n)^*$. Considere a função $T\colon K^n \to K^m$ definida por

$$T(v) = (f_1(v), \ldots, f_m(v)).$$

Mostre que $T \in L(K^n, K^m)$ e que toda transformação linear em $L(K^n, K^m)$ tem essa forma, para alguma escolha adequada de $f_1, \ldots, f_m \in (K^n)^*$.

22. Seja V um K-espaço vetorial e seja $B = \{v_i : i \in I\}$ uma base de V. Para cada $i \in I$, seja $f_i \in V^*$ tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, para todo $j \in I$.
    (a) Mostre que $C = \{f_i : i \in I\}$ é linearmente independente.
    (b) Mostre que C é uma base de V^* se, e somente se, I for finito.

23. Seja V um K-espaço vetorial e seja $f \in V^*$ um funcional linear não nulo. Mostre que existe $v \in V$ tal que $V = \ker f \oplus \langle v \rangle$.

24. Seja V um K-espaço vetorial e sejam $f, g \in V^*$. Mostre que se $\ker f = \ker g$, então existe $\lambda \in K$, tal que $f(v) = \lambda g(v)$, para todo $v \in V$.

25. Seja V um K-espaço vetorial. Mostre que $v \in V$ é o vetor nulo se, e somente se $f(v) = 0$, para todo $f \in V^*$.

26. Seja $\mathrm{tr}\colon M_n(K) \to K$ a função *traço* definida por

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

para $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$.
    (a) Mostre que tr é linear e que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, para quaisquer $A, B \in M_n(K)$.
    (b) Mostre que matrizes semelhantes possuem o mesmo traço.
    (c) Prove que o traço em $M_n(K)$ é único no seguinte sentido: Se $f \in (M_n(K))^*$ é tal que $f(AB) = f(BA)$, para quaisquer matrizes $A, B \in M_n(K)$, então existe $\alpha \in K$ tal que $f = \alpha\,\mathrm{tr}$. Se, além disso, $f(I_n) = n$ e a característica de K é zero, então $f = \mathrm{tr}$.

27. Sejam U e W subespaços de um K-espaço vetorial V. Prove que $U = W$ se, e somente se, $U^0 = W^0$.

28. Sejam U e W subespaços de um K-espaço de dimensão finita V. Prove que:
    (a) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.
    (b) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

    A condição sobre a dimensão de V é necessária?