MAT5730 - Álgebra Linear

Prova 1 - 11/10/2016

1. Seja K um corpo.
   (a) Calcule o determinante da matriz de Vandermonde, isto é, prove que
   $$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i),$$
   onde $c_1, \ldots, c_n \in K$. **(1.25 pontos)**
   (b) Seja m um inteiro positivo e $K_m[t]$ o conjunto de polinômios de grau menor o igual que m com coeficientes em K. Sejam $a_1, \ldots, a_{m+1} \in K$ diferentes dois a dois. Considere as funções de avaliação $\tau_i \colon K_m[t] \to K$, $\tau_i(p(t)) = p(a_i)$, $i = 1, \ldots, m+1$.
   Mostre que $\mathcal{B} = \{\tau_1, \ldots, \tau_{m+1}\}$ é uma base de $K_m[t]^*$, o espaço dual de $K_m[t]$. **(1 ponto)**

2. Sejam K um corpo, V um K-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $T \colon V \to V$ um operador linear. Sejam $p(t), q(t) \in K[t]$ polinômios e considere os operadores lineares $p(T), q(T) \colon V \to V$
   (a) Mostre que o subespaço $\ker p(T)$ é $q(T)$-invariante. **(0.5 pontos)**
   (b) Seja $S \colon \ker p(T) \to \ker p(T)$ a restrição de $q(T)$ ao subespaço $\ker p(T)$. Se os polinômios $p(t)$ e $q(t)$ são coprimos, mostre que $S \colon \ker p(T) \to \ker p(T)$ é um isomorfismo. **(1 ponto)**

3. Sejam K um corpo, n um inteiro positivo e $A, B \in M_n(K)$ com A invertível. Mostre que se AB é diagonalizável, então BA também é diagonalizável. **(1.5 pontos)**

4. Dê as possíveis formas de Jordan de um operador linear $T \colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ com polinômio característico $c_T(t) = (t-1)^3(t-2)^5$ e tal que $\dim(\ker(T - 2I)) = 2$, $\dim(\ker(T-2I)^3) \neq \dim(\ker(T-2I)^2)$ e $\dim(\ker(T - I)) = 2$. **(1.25 pontos)**

5. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ uma base de V e $\mathcal{B}^*$ a base de V^* dual de $\mathcal{B}$. Seja $T \colon V \to V$ um operador linear tal que
   $$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$
   (a) Se existir, encontre uma base $\mathcal{C}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz de Jordan por blocos e encontre uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$. **(1.5 pontos)**
   (b) Se existir, encontre a forma de Jordan J' de $T^t \colon V^* \to V^*$ e uma matriz Q tal que $J' = Q[T]_{\mathcal{B}^*}Q^{-1}$. **(1 ponto)**

6. Seja $N \in M_3(\mathbb{C})$ uma matriz nilpotente.
   (a) Mostre que o índice de nilpotência de N é ≤ 3. **(0.25 pontos)**
   (b) Mostre que a matriz $A = I + \frac{1}{n}N + \frac{1-n}{2n^2}N^2$ satisfaz $A^n = I + N$ para todo inteiro positivo n. **(0.5 pontos)**
   (c) Mostre que toda matriz invertível $A \in M_3(\mathbb{C})$ possui uma raiz n-ésima, ou seja, existe uma matriz $B \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$. **(0.25 pontos)**