MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Primeiro semestre de 2013

Exame final - 19 de junho de 2013

Justifique todas as suas afirmações. Boa prova.

1. (2,0 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_7(\mathbb{R}).$$

   Determine a forma racional R de A e encontre uma matriz $P \in M_7(\mathbb{R})$ inversível tal que $P^{-1}AP = R$.

2. (2,0 pontos) Determine, a menos de semelhança, todas as matrizes $A \in M_5(\mathbb{R})$ que satisfazem $(A - I)^2(A + 2I) = 0$.

3. (2,0 pontos) Seja V um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita com produto interno e seja T um operador normal em V.
   (a) Mostre que $\ker T = (\operatorname{Im} T)^\perp$.
   (b) Mostre que se $v \in V$ é tal que $T^2(v) = 0$, então $T(v) = 0$.
   (c) Mostre que se $T^{2n} = T^n$, para algum inteiro positivo n, então $T^{n+1} = T$.

4. (1,5 ponto) Seja V um espaço vetorial real ou complexode dimensão finita com produto interno e sejam $S, T \in L(V)$ operadores positivos. Prove que $S \circ T$ é positivo se, e somente se, $S \circ T = T \circ S$.

5. (2,5 pontos) Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, apresentando uma demonstração ou um contra-exemplo.
   (a) Se V é um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K e T é um operador diagonalizável de V então T possui n autovalores distintos se, e somente se, T possui um vetor cíclico.
   (b) Se $K \subset F$ são corpos então $F \otimes_K K^n \cong F^n$ como F-espaços vetoriais.
   (c) Se V é um K-espaço vetorial de dimensão finita e f é uma forma bilinear simétrica em V, então $V = \{0\}^\perp$ e $V^\perp = \{0\}$.
   (Para cada subespaço W de V, lembre que $W^\perp = \{u \in V : f(u, v) = 0,$ para todo $v \in W\}$.)