MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Primeiro semestre de 2013

Terceira prova - 12 de junho de 2013

Justifique todas as suas afirmações. Boa prova.

1. (2,0 pontos) Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Existe alguma matriz simétrica $B \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$? E tal que $B^3 = A$? Por que? Caso exista, exiba a matriz.
(Dado: o polinômio característico de $A$ é $(t+2)^2(t-4)$.)

2. (2,0 pontos) Seja $A$ uma matriz real de ordem $n$, inversível.
   (a) Mostre que existe uma matriz $B$ real, simétrica e positiva tal que $B^2 = A^t A$.
   (b) Mostre que $AB^{-1}$ é ortogonal.

3. (2,0 pontos) Seja $V$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno. Sejam $T\colon V \to V$ um operador linear e $T^*$ o operador adjunto de $T$. Prove que $T$ é um operador normal se, e somente se, todo subespaço $T$-invariante de $V$ é também $T^*$-invariante.

4. (2,0 pontos) Sejam $U$ e $V$ $K$-espaços vetoriais. Mostre que existe uma única transformação linear
$$\theta\colon U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$$
tal que $\theta(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)g(v)$, para todos $f \in U^*$, $g \in V^*$, $u \in U$ e $v \in V$. Mostre também que $\theta$ é injetora e, se $U$ e $V$ têm dimensão finita, então $\theta$ é isomorfismo.

5. (2,0 pontos) Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas formas lineares não nulas e seja $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(u,v) = f(u)g(v) + f(v)g(u)$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$. Mostre que $F$ é uma forma bilinear não degenerada se, e somente se, $f$ e $g$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.