MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Primeiro semestre de 2013

Segunda prova - 15 de maio de 2013

Justifique todas as suas afirmações.

Se você for usar algum exercício de alguma das listas do curso, inclua sua solução.

1. (2,0 pontos) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T \in L(V)$ tal que os únicos subespaços T-invariantes de V são 0 e V. Mostre que todo operador de V que comuta com T é um polinômio em T.
(*Dica:* o que se pode dizer sobre os polinômios característico e minimal de T?)

2. (2,0 pontos) Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
Determine a forma racional R de A e encontre uma matriz $P \in M_5(\mathbb{R})$ inversível tal que $P^{-1}AP = R$.

3. (1,5 ponto) Seja V um espaço vetorial de dimensão n, com $n \geq 2$ e seja T um operador linear em V de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de T.

4. (1,0 ponto) Considere $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual. Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$ um operador tal que $v_1 = (1, 1, \ldots, 1)$, $v_2 = (1, \ldots, 1, 0), \ldots, v_n = (1, 0, \ldots, 0)$ são autovetores de T. Mostre que T é autoadjunto se, e somente se, T possui um único autovalor.

5. (1,5 ponto) Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno e seja $T \in L(V)$ um operador normal. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos de T são ortogonais.

6. (2,0 pontos) Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, apresentando uma demonstração ou um contra-exemplo.
   (a) Duas matrizes nilpotentes de ordem 5 que possuem o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto são semelhantes.
   (b) Todo operador unitário é autoadjunto.