MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Primeiro semestre de 2013

Primeira prova - 10 de abril de 2013

1. (2,0 pontos) As seguintes matrizes pertencem a $M_n(K)$, onde K é um corpo de característica zero e $n \geq 1$.

   (a) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ são semelhantes.

   (b) Calcule o determinante de $\begin{bmatrix} a-x & a & \cdots & a \\ a & a-x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a-x \end{bmatrix}$

2. (2,0 pontos) Sejam V um K-espaço de dimensão finita, $T \in L(V)$ e $W \subset V$ um subespaço T-invariante.

   (a) Mostre que existe um único operador $\overline{T} \in L(V/W)$ tal que $\overline{T}(v + W) = T(v) + W$, para todo $v \in V$.

   (b) Mostre que $f(\overline{T}) = \overline{f(T)}$, para todo $f(t) \in K[t]$.

   (c) Mostre que o polinômio minimal de $\overline{T}$ divide o polinômio minimal de T.

3. (2,5 pontos) Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, apresentando uma demonstração ou um contra-exemplo.

   (a) Se $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ é uma matriz anti-simétrica (isto é, $A^t = -A$) e n é ímpar então $\det(A) = 0$.

   (b) Duas matrizes complexas de ordem 4 são semelhantes se e somente se elas possuem os mesmos polinômios característico e minimal.

   (c) O operador $T \in L(M_n(\mathbb{Z}_3))$, onde $n \geq 1$, definido por $T(A) = A^t$, para todo $A \in M_n(\mathbb{Z}_3)$, é diagonalizável.

4. (1,5 ponto) Sejam V um K-espaço de dimensão finita, $T \in L(V)$ e $v, w \in V$ tais que os polinômios T-anuladores $p_v(t)$ e $p_w(t)$ são primos entre si. Mostre que o polinômio T-anulador de $v + w$ é o produto $p_v(t) \cdot p_w(t)$.

5. (2,0 pontos) Seja V um K-espaço de dimensão finita n e seja T um operador com n autovalores distintos. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V formada por autovetores de T. Mostre que se $W \subset V$ é um subespaço T-invariante de dimensão k, onde $1 \leq k \leq n$, então existe um subconjunto de k elementos de B que gera W.