MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Prova 2 - 27/06/2015

1. Sejam k um corpo, R uma k-álgebra e $R^e := R \otimes_k R^{op}$. Sejam L e N R-módulos à esquerda. Seja M um (R,R)-bimódulo.
   (a) Defina estruturas de R^e-módulo à esquerda em M e em $\mathrm{Hom}_k(L,N)$. (Não precisa provar, só explicitá-la).
   (b) Defina um homomorfismo de k-módulos injetor
   $$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R L, N) \to \mathrm{Hom}_{R^e}(M, \mathrm{Hom}_k(L,N)), \qquad f \mapsto \widehat{\ }^f$$
   onde $\widehat{\ }^f : M \to \mathrm{Hom}_k(L,N)$, $x \mapsto \widehat{x}^f$.
   (c) Prove que a definição que forneceu em (b) é de fato um homomorfismo injetor de k-módulos.
   (Dica: Prove de maneira similar ao teorema do isomorfismo adjunto)

2. Seja R um anel. Dizemos que um homomorfismo de R-módulos à direita $f: M \to N$ *fatoriza por um projetivo* se existirem um R-módulo projetivo à direita P e homomorfismos de R-módulos $\alpha: M \to P$ e $\beta: P \to N$ tais que $f = \beta\alpha$
   $$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$
   Para cada par de R-módulos à direita M e N, definimos o subconjunto $\mathcal{P}(M,N)$ de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ como
   $$\mathcal{P}(M,N) = \big\{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) : f \text{ fatoriza por um projetivo}\big\}.$$
   (a) Seja $f: M \to N$ um homomorfismo de R-módulos à direita que fatoriza por um projetivo, ou seja, $f \in \mathcal{P}(M,N)$. Se $\delta: Q \to N$ for um epimorfismo de R-módulos à direita com Q projetivo, mostre que existe um homomorfismo de R-módulos à direita $\gamma: M \to Q$ tal que $f = \delta\gamma$.
   (b) Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ ao homomorfismo $\delta: Q \to N$ mostre (usando (a)):
   Para cada par de R-módulos à direita M e N, $\mathcal{P}(M,N)$ é um subgrupo de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.
   (c) Mostre que os seguintes dados definem uma categoria $\mathcal{C}$:
   $$\mathit{Obj}\,\mathcal{C} = \mathit{Obj}\ \text{Mod-}R, \qquad \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(M,N) = \frac{\mathrm{Hom}_R(M,N)}{\mathcal{P}(M,N)},$$
   $$\mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(M,N) \times \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(L,M) \to \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(L,N),\ (\overline{\beta}, \overline{\alpha}) \mapsto \overline{\beta\alpha},$$
   onde L, M, N são R-módulos à direita e $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(L,M)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.
   (d) Se R for um anel semisimples, como é a categoria $\mathcal{C}$ definida em (c)?

3. Seja $f: R \to S$ um homomorfismo de anéis sobrejetor com $I = \ker f$.
   (a) Seja M um R-módulo à direita. Considere o R-módulo M/MI. Para cada $m \in M$ denotamos por $\overline{m}$ a classe de m em M/MI.
   Mostre que M/MI pode ser munido de uma estrutura de S-módulo à direita da seguinte forma:
   $$\text{Para cada } m \in M,\ s \in S, \quad \overline{m}s := \overline{mr} \text{ onde } f(r) = s.$$
   (b) Definimos o funtor $F: \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$ da seguinte forma:
      (i) Se M for um R-módulo à direita, definimos $F(M) := M/MI$.
      (ii) Se $\alpha: M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos à direita, definimos $F(\alpha): FM \to FN$, como $F(\alpha)(\overline{m}) := \overline{\alpha(m)}$, para todo $m \in M$.
   Mostre que $F(\alpha)$ está bem definida e que F é, de fato, um funtor.
   (c) Considere o funtor $G := -\otimes_R S: \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$. Mostre que os funtores F e G são naturalmente isomorfos (equivalentes).

4. Considere o seguinte diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita tal que as duas linhas são exatas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mostre que se f e h são isomorfismos, então g também é um isomorfismo.

5. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Sejam $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F', G'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores todos covariantes. Sejam $\eta\colon F \to G$ e $\eta'\colon F' \to G'$ transformações naturais. Mostre que existe uma transformação natural $\tau\colon F'F \to G'G$.

6. Seja R um anel. Seja F um R-módulo à direita munido de uma família de R-submódulos $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ que satisfaz a seguinte propriedade:

Se N for um R-submódulo finitamente gerado
de F, então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $N \subseteq F_\gamma$.

Mostre que se F_γ é um R-módulo plano para todo $\gamma \in \Gamma$, então F é um R-módulo plano.

7. Seja Z um anel comutativo. Suponha que A, U e V são Z-álgebras tais que U e V são Z-módulos livres.
Mostre que A é isomorfa a $U \otimes_Z V$ se, e somente se, A contém Z-subalgebras U' e V' tais que satisfazem as seguintes condições:
 (i) $U' \cong U$ e $V' \cong V$ como Z-álgebras,
 (ii) os elementos de U' comutan com os elementos de V',
 (iii) A é um Z-módulo livre,
 (iv) existem Z-bases $\{x_i\}_{i\in I}$ de U' e $\{y_j\}_{j\in J}$ de V' tais que $\{x_i y_j\colon (i,j) \in I \times J\}$ é uma Z-base de A.

8. (a) Seja (F, G) um par adjunto de funtores aditivos entre categorias de módulos.
Mostre que se F é exato, então G preserva injetivos, ou seja, GE é injetivo para todo módulo injetivo E.
 (b) Sejam R um anel, H um grupo e $R[H]$ o anel de grupo. Mostre, como consequência, que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R[H], \mathbb{Q})$ é um R-módulo à direita injetivo.