MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Prova 1 - 30/04/2015

1. Sejam R um anel, L_1, L_2 e M três R-módulos à direita e $f_1\colon M \to L_1$ e $f_2\colon M \to L_2$ homomorfismos de R-módulos. Considere o submódulo N de $L_1 \oplus L_2$, e o módulo quociente Q de $L_1 \oplus L_2$ definidos por

$$N = \big\{(f_1(m), -f_2(m)) \in L_1 \oplus L_2 \colon m \in M\big\}, \qquad Q = \frac{L_1 \oplus L_2}{N}.$$

Para cada $i \in \{1,2\}$, seja $\varepsilon_i\colon L_i \to Q$ a composição da inclusão canônica $\eta_i\colon L_i \to L_1 \oplus L_2$ com a projeção natural $\pi\colon L_1 \oplus L_2 \to Q$, ou seja, $\varepsilon_i = \pi\eta_i$.

(a) Mostre que $\varepsilon_1 f_1 = \varepsilon_2 f_2$.

(b) Dados um R-módulo à direita X e homomorfismos $g_1\colon L_1 \to X$ e $g_2\colon L_2 \to X$ tais que $g_1 f_1 = g_2 f_2$, mostre que existe um único homomorfismo $h\colon Q \to X$ tal que $h\varepsilon_1 = g_1$ e $h\varepsilon_2 = g_2$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & L_2 \arrow[d, "\varepsilon_2"'] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
L_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & Q \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

(c) Suponha que R é um anel de polinômios da forma $R = S[x;\alpha]$ onde S é um anel noetheriano e $\alpha\colon S \to S$ é um automorfismo de anéis. Suponha que L_1 e L_2 são R-módulos finitamente gerados. Mostre que Q_R é um R-módulo noetheriano.

2. (a) Enuncie o Teorema de Krull-Schmidt-Azumaya.

(b) Sejam K um anel com divisão e $\alpha\colon K \to K$ um automorfismo de K. Considere o anel de séries $R = K[[x;\alpha]]$. Seja S um anel cujos únicos idempotentes são 0 e 1.
Mostre que os anéis de matrizes $M_m(R)$ e $M_n(S)$ são isomorfos se, e somente se, $m = n$ e $R \cong S$.

3. Sejam R um anel e M_R um R-módulo à direita.

(a) Seja $e\colon M \to M$ um endomorfismo de R-módulos tal que $e = e^2$. Mostre que

$$M = \ker e \oplus \operatorname{im} e.$$

(b) Suponha que existe um homomorfismo de R-módulos sobrejetor $f\colon M \to F$ onde F é um R-módulo à direita livre. Mostre que

$$M = \ker f \oplus F'$$

onde F' é um R-submódulo de M isomorfo a F.

4. Enuncie e demonstre o Teorema de Wedderburn-Artin.

5. Sejam R um anel, M um R-módulo à direita e $\{N_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos à direita. Construa um isomorfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I} N_i, M\Big) \to \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(N_i, M).$$

6. Sejam R um anel semisimples e M_R um R-módulo à direita finitamente gerado. Mostre que existe um R-módulo à direita finitamente gerado N_R tal que $M_R \oplus N_R$ é um R-módulo livre.