

MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Prova 1 - 30/04/2015

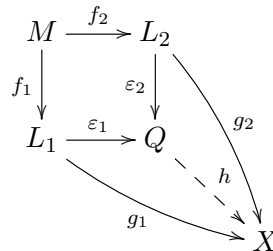
1. Sejam R um anel, L_1, L_2 e M três R -módulos à direita e $f_1: M \rightarrow L_1$ e $f_2: M \rightarrow L_2$ homomorfismos de R -módulos. Considere o submódulo N de $L_1 \oplus L_2$, e o módulo quociente Q de $L_1 \oplus L_2$ definidos por

$$N = \{(f_1(m), -f_2(m)) \in L_1 \oplus L_2 : m \in M\}, \quad Q = \frac{L_1 \oplus L_2}{N}.$$

Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja $\varepsilon_i: L_i \rightarrow Q$ a composição da inclusão canônica $\eta_i: L_i \rightarrow L_1 \oplus L_2$ com a projeção natural $\pi: L_1 \oplus L_2 \rightarrow Q$, ou seja, $\varepsilon_i = \pi\eta_i$.

(a) Mostre que $\varepsilon_1 f_1 = \varepsilon_2 f_2$.

(b) Dados um R -módulo à direita X e homomorfismos $g_1: L_1 \rightarrow X$ e $g_2: L_2 \rightarrow X$ tais que $g_1 f_1 = g_2 f_2$, mostre que existe um único homomorfismo $h: Q \rightarrow X$ tal que $h\varepsilon_1 = g_1$ e $h\varepsilon_2 = g_2$.



(c) Suponha que R é um anel de polinômios da forma $R = S[x; \alpha]$ onde S é um anel noetheriano e $\alpha: S \rightarrow S$ é um automorfismo de anéis. Suponha que L_1 e L_2 são R -módulos finitamente gerados. Mostre que Q_R é um R -módulo noetheriano.

2. (a) Enuncie o Teorema de Krull-Schmidt-Azumaya.

(b) Sejam K um anel com divisão e $\alpha: K \rightarrow K$ um automorfismo de K . Considere o anel de séries $R = K[[x; \alpha]]$. Seja S um anel cujos únicos idempotentes são 0 e 1. Mostre que os anéis de matrizes $M_m(R)$ e $M_n(S)$ são isomorfos se, e somente se, $m = n$ e $R \cong S$.

3. Sejam R um anel e M_R um R -módulo à direita.

(a) Seja $e: M \rightarrow M$ um endomorfismo de R -módulos tal que $e = e^2$. Mostre que

$$M = \ker e \oplus \operatorname{im} e.$$

(b) Suponha que existe um homomorfismo de R -módulos sobrejetor $f: M \rightarrow F$ onde F é um R -módulo à direita livre. Mostre que

$$M = \ker f \oplus F'$$

onde F' é um R -submódulo de M isomorfo a F .

4. Enuncie e demonstre o Teorema de Wedderburn-Artin.

5. Sejam R um anel, M um R -módulo à direita e $\{N_i\}_{i \in I}$ uma família de R -módulos à direita. Construa um isomorfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} N_i, M\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_R(N_i, M).$$

6. Sejam R um anel semisimples e M_R um R -módulo à direita finitamente gerado. Mostre que existe um R -módulo à direita finitamente gerado N_R tal que $M_R \oplus N_R$ é um R -módulo livre.