MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista de exercícios

1.- Seja R um anel e $X \subseteq R$ um subconjunto não vazio de R. Mostre que:
(a) $RX := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \colon r_i \in R,\, x_i \in X,\, n \geq 1\}$ é um ideal à esquerda que contém X.
(b) $RXR := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i s_i \colon r_i, s_i \in R,\, x_i \in X,\, n \geq 1\}$ é um ideal que contém X.
(c) $RX = \bigcap\{I \colon I \text{ ideal à esquerda de } R,\, X \subseteq I\}$.
(d) $RXR = \bigcap\{I \colon I \text{ ideal de } R,\, X \subseteq I\}$.
Dizemos que RXR (respectivamente RX) é o ideal (à esquerda) *gerado* por X.

2.- Seja R um anel. Defina o *centro* de R como $\mathcal{Z}(R) = \{a \in R \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in R\}$, é um subanel de R. Mostre que:
(a) $\mathcal{Z}(R)$ é um subanel de R;
(b) se R é um anel simples então $\mathcal{Z}(R)$ é um corpo. Um anel é *simples* se os únicos ideais de R são R e $\{0\}$;
(c) $\mathcal{Z}(M_n(R)) = \{zI_n \colon z \in \mathcal{Z}(R)\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, e onde I_n denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

3.- Seja R um anel e seja X um subconjunto de R. Defina o *centralizador* de X em R como sendo o conjunto

$$\mathrm{Cen}_R(X) = \{a \in R \colon ax = xa, \text{ para todo } x \in X\}.$$

(a) Mostre que $\mathrm{Cen}_R(X)$ é um subanel de R e que $\mathcal{Z}(R) = \mathrm{Cen}_R(R)$.
(b) Mostre que $X = \mathrm{Cen}_R(X)$ se, e somente se, X for um subanel comutativo maximal de R.
(c) Mostre que se $a \in \mathrm{Cen}_R(X)$ for invertível em R, então seu inverso está em $\mathrm{Cen}_R(X)$.

4.- Mostre que um anel A é uma k-algebra se, e somente se, existe um homomorfismo de anéis $k \to \mathcal{Z}(A)$.

5.- Seja R um anel. Uma *derivação* é uma função $\delta \colon R \to R$ tal que $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ e $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ para todos $a, b \in R$. Mostre que uma função $\delta \colon R \to R$ é uma derivação se, e somente se, a função $R \to M_2(R)$, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, é um homomorphismo de anéis.

6.- Seja I um ideal de um anel R, e n um inteiro positivo. Use o teorema do isomorfismo para provar que $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.

7.- Mostre que um anel R é um anel com divisão se, e somente se, para cada $a \in R \setminus \{0\}$ existe $b \in R$ tal que $ba = 1$.

8.- Seja R um anel e denotemos por $U(R)$ o conjunto de elementos invertíveis de R. Dizemos que um anel é *local* se o conjunto $R \setminus U(R)$ é um ideal de R. Mostre que nesse caso $\mathfrak{m} = R \setminus U(R)$ é um ideal e que $R/\mathfrak{m}$ é um anel com divisão. Mostre também que são equivalentes:
(a) R é um anel local
(b) R possui um único ideal maximal à esquerda.
(c) R possui um único ideal maximal à direita.
(d) $(R \setminus U(R),\, +)$ é um grupo.
(e) $a + b \in U(R)$ implica que $a \in U(R)$ ou $b \in U(R)$.

9.- Seja R um anel. Sejam $a, b \in R$.
(a) Suponha que ab é invertível. Mostre com um exemplo que a e b não precisam ser invertíveis.
(b) Se a^n, $n \geq 1$, é invertível, então a é invertível.
(c) Suponha que $ba = 1$. Se $xa = 0$ implica que $x = 0$, então a é invertível.
(d) Se R é um domínio, mostre que se $ba = 1$, então $ab = 1$.

10.- Seja I um conjunto e $\{R_i\}_{i \in I}$ um conjunto de anéis. Mostre que o produto direto $\prod_{i \in I} R_i$ é um anel com a soma e produto definidos como

$$(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I} \qquad (a_i)_{i \in I}(b_i)_{i \in I} = (a_i b_i)_{i \in I}.$$

Supondo que I é finito, mostre que os ideais de $\prod_{i \in I} R_i$ são da forma $\prod_{i \in I} B_i$ onde B_i é um ideal de R_i para cada $i \in I$. É verdadeiro o resultado se I for infinito?

11.- Seja R um anel e $B_1, \dots, B_n$ ideais à esquerda. Mostre que $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ se, e somente se, existem idempotentes $e_1, \dots, e_n$ tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $B_i = Re_i$ para todo i.

12.- Seja R um anel e $B_1, \dots, B_n$ ideais. Mostre que $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ se, e somente se, existem idempotentes centrais $e_1, \dots, e_n$ tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $B_i = Re_i$ para todo i. Mostre que cada B_i é um anel com identidade e_i, e temos um isomorfismo de anéis entre R e o produto direto de anéis $B_1 \times \cdots \times B_n$. Mostre que um isomorfismo de R com um produto direto finito de anéis aparece deste modo.

13.- Seja R um anel e $M_n(R)$ o anel de matrizes de tamanho $n \times n$ sobre R. Mostre que se $\mathfrak{A}$ é um ideal de R, então $M_n(\mathfrak{A})$ é um ideal de $M_n(R)$. E mostre que todo ideal I de $M_n(R)$ é da forma $M_n(\mathfrak{A})$ para um único ideal $\mathfrak{A}$ de R. Em particular, se R é um anel simples, $M_n(R)$ também é simples.

14.- Seja R um anel e $\sigma\colon R \to R$ um homomorfismo de anéis. Mostre o seguinte:
   (a) $R[x;\sigma]$ ($R[[x;\sigma]]$, $R((x;\sigma))$) é um domínio se, e somente se R é um domínio e σ é injetor.
   (b) Mostre que o conjunto de elementos invertíveis de $R[[x;\sigma]]$ é formado pelas séries $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ com a_0 um elemento invertível em R. Logo se R é um anel local, $R[[x;\alpha]]$ é um anel local.
   (c) $R((x;\sigma))$ é um anel com divisão se, e somente se, R é um anel com divisão e σ é injetor.

15.- Seja R um anel tal que existem $a, b \in R$ tais que $ab = 1$ mas $ba \neq 1$. Mostre que existem infinitos $d \in R$ tais que $ad = 1$.

16.- Seja R um anel e G um grupo. Considere o anel de grupo $R[G]$. Mostre as seguintes afirmações:
   (a) A função $\rho\colon R[G] \to R$, $\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g$, é um homomorfismo de anéis.
   (b) $\ker \rho$ é o ideal gerado pelo conjunto $\{g - 1 \colon g \in G\}$.
   (c) Se R é um anel comutativo, a função $R[G] \to R[G]$, $\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g g^{-1}$ é uma involução.

   Lembrete: Seja R um anel e consideremos uma função $f\colon R \to R$. Dizemos que f é um *antihomomorfismo* de anéis se satisfaz: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(b)f(a)$ e $f(1) = 1$ para todos $a, b \in R$. Dizemos que f é uma *involução* se f é um antihomomorfismo tal que f^2 é a identidade. Um exemplo importante de involução é a transposição de matrizes.

17.- Seja R um anel, σ um automorfismo de R, e considere $R[x;\sigma]$. Suponha que existem um anel T, um homomorfismo de anéis $\phi\colon R \to T$, e um elemento $y \in T$ tal que $y\phi(a) = \phi(\sigma(a))y$ para todo $a \in R$. Então existe um único homomorfismo de anéis $\Phi\colon R[x;\sigma] \to T$ tal que $\Phi_{|R} = \phi$ e $\Phi(x) = y$.

18.- Seja $A = \mathbb{C}[x;\sigma]$, onde σ denota a conjugação em $\mathbb{C}$.
   (a) Mostre que $\mathcal{Z}(A) = \mathbb{R}[x^2]$.
   (b) Mostre que $A/A(x^2 + 1)$ é isomorfo a $\mathbb{H}$, os quatérnios. (Use o exercício 17).

19.- Seja K um anel com divisão com centro k.
   (a) Mostre que o centro do anel de polinômios $R = K[x]$ é $k[x]$.
   (b) Seja $a \in K \setminus k$. Mostre que o ideal gerado por $x - a$ em $K[x]$ é o total, $K[x]$.
   (c) Mostre que todo ideal $I \subseteq R$ é da forma $I = Rh$ para algum $h \in k[x]$.

20.- Seja $(M, +)$ um grupo abeliano e seja R um anel. Mostre que:
   (a) Se $\varphi\colon R \to \mathrm{End}(M)$ é um homomorfismo de anéis, então M tem uma estrutura de R-módulo à esquerda dada por: $r \cdot m = \varphi(r)(m)$, para todo $r \in R$ e para todo $m \in M$.
   (b) Se M é um R-módulo à esquerda, então

$$\varphi\colon R \to \mathrm{End}(M),\ r \mapsto \varphi(r)$$

   é um homomorfismo de anéis onde $\varphi(r)\colon M \to M$, $m \mapsto r \cdot m$.

21.- Seja R um anel munido de um antihomomorfismo $h\colon R \to R$, e M_R um R-módulo.
   (a) Mostre que M pode ser considerado como um R-módulo à esquerda com o produto $a \cdot m = mh(a)$ para todo $a \in R$.
   (b) Suponha que h é uma involução. Mostre que se um subconjunto N de M é um submódulo de M_R, ele também é um submódulo de ${}_RM$ e viceversa.
   (c) Seja R um anel. Mostre que $M_{m \times n}(R)$ tem estrutura de $M_n(R)$-módulo à esquerda.
   (d) Seja R um anel comutativo e G um grupo. Considere o anel de grupo $R[G]$. Mostre que todo $R[G]$-módulo à direita também é um $R[G]$-módulo à esquerda.

22.- Seja R um anel e M_R um módulo. Seja X um subconjunto de M. Definimos o *anulador* de X como o conjunto

$$\operatorname{ann}(X) = \{a \in R \colon xa = 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

(a) Mostre que $\operatorname{ann}(X)$ é um ideal à direita de R e que se X for um submódulo de M, então $\operatorname{ann}(X)$ é um ideal de R.
(b) Seja Y um subconjunto de M. Mostre que $X \subseteq Y$ implica que $\operatorname{ann}(Y) \subseteq \operatorname{ann}(X)$.
(c) Seja N um R-módulo à direita. Mostre que se $M \cong N$, então $\operatorname{ann}(M) = \operatorname{ann}(N)$.
(d) Seja $\{M_i \colon i \in I\}$ uma família de submódulos de M tais que $M = \sum_{i\in I} M_i$. Mostre que $\operatorname{Ann}(M) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{ann}(M_i)$.
(e) Mostre que se K for um ideal à direita de de R, então tem-se que $\operatorname{ann}(R/K)$ é o maior ideal J de R tal que $J \subseteq K$.
(f) Mostre que se $M = mR$ (i.e. M é um R-módulo cíclico), então $M \cong R/N$ (como R-módulos), onde $N = \operatorname{ann}(m)$.

23.- Seja R um anel. Seja M_R um R-módulo (à direita). Seja

$$\operatorname{ann}_R(M) = \{a \in R \colon ma = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

(a) $\operatorname{ann}_R(M)$ é um ideal de R.
(b) Seja I um ideal de R tal que $I \subseteq \operatorname{ann}_R(M)$. Mostre que M é um R/I-módulo com a mesma soma que M_R e produto definido por

$$M \times R/I \to M, \quad (m, a + I) \mapsto ma. \tag{1}$$

(c) Mostre o recíproco de (b): Se (1) faz de M um R/I-módulo (com a mesma soma que M), então $I \subseteq \operatorname{ann}_R(M)$.
(d) Suponha que M_R é livre com base X. Se J é um ideal de R, então MJ é um submódulo de M e M/MJ é um R/J-módulo. Seja $\pi \colon M \to M/MJ$ a projeção natural. Então M/MJ é um R/J-módulo livre com base $\pi(X) = \{\pi(x)\}_{x\in X}$

24.- Seja D um anel com divisão e V_D um D-módulo à direita.

(a) Mostre que V é um D-módulo livre. Em particular, todo espaço vetorial tem uma base. Mais geralmente, usando o lema de Zorn, mostre que se S gera V e $B_0 \subseteq S$ é um subconjunto linearmente independente, então existe uma base B de V tal que $B_0 \subseteq B \subseteq S$.
(b) Qualquer subconjunto D-linearmente independente de V pode ser extendido a uma base de V.
(c) Um subconjunto D-linearmente independente maximal de V é uma base.
(d) Um subconjunto minimal que gera V é uma base.
(e) Mostre que D satisfaz IBN.

25.- Seja M_R um R-módulo e sejam A, B e C submódulos de M. Se $C \subseteq A$, mostre que

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C.$$

Essa igualdade é conhecida como a *lei modular*. Mostre, com um exemplo, que essa fórmula não é necessariamente verdadeira se C não estiver contido em A.

26.- Seja R um anel e L_R um R módulo finitamente gerado. Denotamos por $\mu(L)$ o número mínimo de geradores de L.
Seja agora M_R um R-módulo e N um submódulo de M_R. Se N e M/N são finitamente gerados, então M também é finitamente gerado e

$$\mu(M) \leq \mu(N) + \mu(M/N).$$

27.- Seja F um corpo e $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios com coeficientes em F nas n variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Considere o R-módulo R_R e N_R o submódulo de R formado por todos os polinômios cujo termo constante é zero. Mostre que $\mu(R) = 1$ e $\mu(N) = n$.

28.- Mostre que o subanel $\mathbb{Z}[\frac{p}{q}]$ de $\mathbb{Q}$, i.e. o subanel de $\mathbb{Q}$ gerado por $\mathbb{Z}$ e $\frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros positivos fixados tais que $p < q$ e $mdc(p, q) = 1$, não é finitamente gerado como $\mathbb{Z}$-módulo.

29.- Seja R um anel e suponha que M é um R-módulo livre com base $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in J}$. Mostre que $\operatorname{Hom}_R(M, N) \cong \prod_{j\in J} N$ como grupos abelianos, para todo R-módulo N.

30.- Sejam $R_1, \ldots, R_n$ anéis e $R = R_1 \times \cdots \times R_n$.

(a) Se M_i é um R_i-módulo à direita para $1 \leq i \leq n$, mostre que $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ é um R-módulo à direita, sob a ação natural
$$(m_1, \ldots, m_n)(a_1, \ldots, a_n) = (m_1 a_1, \ldots, m_n a_n),$$
onde $m_i \in M_i$ e $a_i \in R_i$ para todo i.

(b) Reciprocamente, suponha que $e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes centrais de R tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $R_i = e_i R$. Mostre que se M é um R-módulo, então $M_i = M e_i$ é um R_i-módulo, e $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ como R-módulos.

31.- Seja R um anel e $f\colon M_R \to M_R$ um endomorfismo de R-módulos tal que $f^2 = f$. Mostre que $M_R \cong \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

32.- Seja R um anel comutativo. Seja $N \subseteq R$ um R-módulo livre não nulo. Mostre que existe $a \in R$ tal que $N = aR$.
Seja $S = \mathbb{Z}[x]$ e $N = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in S \mid a_0 \in 13\mathbb{Z}\}$. Mostre que N é um S-módulo finitamente gerado e que não é um S-módulo livre.

33.- Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Se R é um anel, podemos formar o anel de grupo $R[G]$ e considerar o seu subanel $R[H]$. Então $R[G]$ é um $R[H]$-módulo à direita de forma natural. Mostre que $R[G]$ é um $R[H]$-módulo à direita livre. (Dica: Escolha representantes das classes laterais gH e mostre que esses representantes formam uma base de $R[G]$ como $R[H]$-módulo.)

34.- Seja R um anel, seja M um R-módulo à direita e seja $\{N_j : j \in J\}$ uma família de submódulos de M tais que $M = \sum_{j \in J} N_j$. Suponha que J se escreva na forma $J = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ e que essa união seja disjunta. Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $M_\lambda = \sum_{j \in J_\lambda} N_j$.

(a) Mostre que $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.

(b) Mostre que $\sum_{j \in J} N_j$ é direta se, e somente se, as duas condições abaixo estiverem satisfeitas:
  (i) $\sum_{j \in J_\lambda} N_j$ é direta para todo $\lambda \in \Lambda$, e
  (ii) $\sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ é direta.

35.- Seja F um corpo, e seja
$$\mathcal{I} = \{p_\alpha(x)\colon p_\alpha(x) \text{ é um polinômio mônico irreducível em } F[x]\}.$$
Dizemos que uma função racional $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in F(x)$ é própria se $\operatorname{grau}(f) < \operatorname{grau}(g)$. Seja $F(x)_{pr}$ o conjunto de todas as funções racionais próprias em $F(x)$.

(a) Mostre que $F(X) \cong F[x] \oplus F(x)_{pr}$ como F-módulos.

(b) Mostre que
$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{x^j}{(p_\alpha(x))^k} : p_\alpha(x) \in \mathcal{I};\ 0 \leq j < \operatorname{grau}(p_\alpha(x)),\ k \geq 1 \right\}$$
é uma base de $F(x)_{pr}$ como F-módulo.

36.- Seja R um anel e seja $\alpha\colon R \to R$ um endomorfismo de anéis.

(a) Seja G um grupo e considere o anel de grupo $R[G]$. Mostre que $R[G]$ satisfaz IBN se, e somente se, R satisfaz IBN.

(b) Mostre que R satisfaz IBN se, e somente se, $R[x; \alpha]$ satisfaz IBN.

(c) Mostre que R satisfaz IBN se, e somente se, $R[[x; \alpha]]$ satisfaz IBN.

(d) Mostre que todo anel local satisfaz IBN.

37.- Seja R um anel e seja $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de R-módulos à direta. Considere o produto cartesiano $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \colon m_\lambda \in M_\lambda\}$. O conjunto M tem estrutura de R-módulo à direita dada por

$$(m_\lambda) + (n_\lambda) = (m_\lambda + n_\lambda), \qquad (m_\lambda)a = (m_\lambda a),$$

para cada $(m_\lambda), (n_\lambda) \in M$ e $a \in R$. Note que $0_M = (0_{M_\lambda})$. Para cada $\rho \in \Lambda$, a função $\pi_\rho \colon M \to M_\rho$, $(m_\lambda) \mapsto m_\rho$ é um homomorfismo sobrejetor de R-módulos.

Considremos agora N_R, um R-módulo, e $f_\lambda \colon N \to M_\lambda$ um homomorfismo de R-módulos para cada $\lambda \in \Lambda$. Mostre que existe um único homomorfismo de R-módulos $f \colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tal que $\pi_\lambda f = f_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, $\ker f = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker f_\lambda$.

Mostre também que se existir outro R-módulo T_R com a mesma propriedade que M então é isomorfo a M. Ou seja, se T é munido com homomorfismos de R-módulos $\theta_\lambda \colon T \to M_\lambda$ tais que se para cada R-módulo N e homomorfismos $g_\lambda \colon N \to M_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, existe um único homomorfismo $g \colon N \to T$ tal que $\theta_\lambda g = g_\lambda$, então T é isomorfo a M.

38.- Seja R um anel, seja M_R um R-módulo à direita e seja $\{N_i\}$ uma família de R-módulos à direita.

(a) Mostre que existe um isomorfismo de grupos abelianos

$$\varphi \colon \operatorname{Hom}_R\Big(M, \prod_{i\in I} N_i\Big) \to \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M, N_i),$$

definido por $f \mapsto (\pi_i f)$, onde os π_i denotam as projeções do produto direto $\prod_{i\in I} N_i$.

(b) Mostre que existe um isomorfismo de grupos abelianos

$$\psi \colon \operatorname{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I} N_i, M\Big) \to \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(N_i, M),$$

definido por $f \mapsto (f\eta_i)$ onde os η_i denotam as inclusões naturais na soma direta $\bigoplus_{i\in I} N_i$.

(c) Mostre que se o conjunto I for finito, então temos isomorfismos de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_R\Big(M, \bigoplus_{i\in I} N_i\Big) \to \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M, N_i), \quad \operatorname{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I} N_i, M\Big) \to \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(N_i, M)$$

(d) Seja p um número primo e seja C_n o grupo cíclico de p^n elementos, onde n é um inteiro positivo. Se $M_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\geq 1} C_n$, mostre que

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(M, \bigoplus_{n\geq 1} C_n\Big) \ncong \bigoplus_{n\geq 1} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, C_n).$$

(Dica: Prove que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$ possui um elemento de ordem infinita, mas que todo elemento em $\bigoplus_{n\geq 1} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, C_n)$ tem ordem finita.)

(e) Comentário: É conhecido que

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\Big) \ncong \prod_{n\geq 1} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}),$$

mas leva bastante trabalho.

39.- Comentário: $M = \prod_{i\geq 1} \mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, i.e. $\prod_{i\geq 1} \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}^{(I)}$ para nenhum conjunto I. Uma prova simples desse fato está no livro do Lam, Lectures on Modules and Rings, páginas 22 e 23. Seria bom você lembrar do resultado e tentar entender a prova (para isso substitua a palavra "projective" por "free". Mais para frente vamos ver que todo módulo livre é projetivo).

40.- Seja $R \to S$ um homomorfismo de anéis. Já sabemos que usando esse homomorfismo todo S-módulo a direita pode ser considerado como um R-módulo à direita. Supondo que S_R é um R-módulo livre, mostre que todo S-módulo livre é um R-módulo livre.

41.- O que está errado no seguinte raciocínio para mostrar que todo anel/álgebra satisfaz IBN?
Suponha que a k-álgebra A está gerada sobre k por $\{x_i \colon i \in I\}$. Seja I o ideal gerado pelo conjunto $\{x_i x_j - x_j x_i \colon i \neq j\}$. Então R/I é uma k-algebra comutativa e existe um homomorfimos $A \to A/I$. Como a k-álgebra comutativa A/I satisfaz IBN, então A satisfaz IBN.

42.- Encontre um exemplo de um anel R não nulo tal que $M_n(R) \cong M_m(R)$ para quaisquer inteiros $m, n \geq 1$.

43.- Seja N um ideal à direita do anel R tal que $N^k = 0$. Se S_R for um R-módulo simples, então $SN = 0$.

44.- Determine todos os R-mòdulos simples para os seguintes anéis:

$$(a)\ R = \mathbb{Z}, \qquad (b)\ R = \mathbb{C}[x], \qquad (c)\ R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix},\ \text{onde } F \text{ é um corpo.}$$

45.- Seja R um anel. Seja $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ um R-módulo tal que cada S_i, $i = 1, \ldots, n$, é um R-módulo simples à direita. Mostre que $n = 1$ se, e somente se, $\mathrm{End}_R(M_R)$ é um anel com divisão.

46.- Seja F um corpo e seja $R = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in F\}$ o anel das matrizes triangulares superiores sobre F. Seja $M = F \oplus F$ com a estrutura de R-módulo à esquerda dada pela multiplicação (à esquerda) pelas matrizes de R. Mostre que $\mathrm{End}_R(M) = F$. Isto prova que o recíproco do lema de Schur não é verdadeiro, ou seja, $\mathrm{End}_R(M)$ pode ser um anel com divisão e M não ser um R-módulo simples.

47.- Seja R um anel e M_R um R-módulo. Definimos $\mathrm{soc}(M_R)$ como a soma de todos os submódulos simples de M_R (se M não tiver submódulos simples, definimos $\mathrm{soc}(M_R) = 0$).
   (a) Mostre que $\mathrm{soc}(R_R)$ é um ideal (à direita e à esquerda).
   (b) Se $M \neq 0$ e M_R é artiniano, mostre que $\mathrm{soc}(M_R) \neq 0$.
   (c) Se M_R é artiniano e $\phi\colon M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos tal que a restrição de ϕ a $\mathrm{soc}(M)$ é injetora então ϕ é injetora.
   (d) Mostre que $\mathrm{soc}(M_R)$ é uma soma direta de submódulos simples. (Dica: Considere as famílias $\{S_i\}_{i \in I}$ tais que $S_i \leq M$ é simples, e $\sum_i S_i$ é direta. Usando o lema de Zorn mostre que existe uma família maximal. Mostre então que a soma dessa família é $\mathrm{soc}(M_R)$)

48.- Seja K um anel com divisão e $\alpha\colon K \to K$ um endomorfismo de anéis (observa que é injetor).
   (a) Mostre que todo ideal à esquerda de $R = K[x; \alpha]$ é da forma Rp para algum elemento $p \in R$. (Dica: Seja p um elemento de R. Então todo elemento q de R pode ser escrito como $q = dp + r$ onde $\mathrm{grau}(r) < \mathrm{grau}(p)$. Considere p um elemento não nulo do ideal de grau minimal. Mostre que todo elemento do ideal é da forma dp para algum $d \in R$).
   (b) Se α em 48a for um automorfismo, mostre que todo ideal à direita de R é da forma pR para algum $p \in R$.
   (c) Suponha em 48a que α não é sobrejetor, e seja $b \in K \setminus \alpha(K)$. Mostre que o ideal à direita $\sum_{i=0}^{\infty} x^i bxR$ é uma soma direta dos ideais à direita $x^i bxR$. Mostre que isso implica que $K[x; \alpha]$ não é noetheriano à direita.
   (d) Mostre que $K[x; \alpha]$ não é artiniano à direita nem artiniano à esquerda. (Dica: Considere $xR \supseteq x^2R \supseteq \cdots$ e $Rx \supseteq Rx^2 \supseteq \cdots$).

49.- Seja α um automorfismo do anel R. Mostre que α^{-1} é um automorfismo do anel oposto R^{op} e que $R[x; \alpha]^{op} = R^{op}[x; \alpha^{-1}]$.

50.- Mostre que um anel R é noetheriano à direita se, e somente se, R^{op} é noetheriano à esquerda.

51.- Mostre que um subanel de um anel noetheriano pode não ser noetheriano. (Dica: um domínio comutativo está contido em um corpo).

52.- Seja $R = R_1 \times \cdots \times R_k$ um produto direto de anéis. Mostre que R é noetheriano à direita se, e somente se, cada R_i é noetheriano à direita.

53.- Seja $f\colon R \to S$ um homomorfismo de anéis sobrejetor. Mostre que um S-módulo M_S é noetheriano se, e somente se, M é noetheriano como R-módulo. Em particular, S é um anel noetheriano à direita se, e somente se, S é noetheriano como R-módulo à direita.
Mostre também que as seguintes afirmações são equivalentes.
   (a) R é um anel noetheriano à direita.
   (b) S é um anel noetheriano à direita e $\ker f$ é noetheriano como R-módulo à direita.

54.- Seja $f\colon R \to S$ um homomorfismo de anéis e seja M_S um S-módulo à direita. Mostre que se M é artiniano como R-módulo (via f) à direita, então M é artiniano como S-módulo à direita. Mostre que o recíproco é certo se f for sobrejetor.

55.- Seja R um anel, seja M_R um R-módulo e $f \in \mathrm{End}_R(M_R)$. Mostre as seguintes afirmações:
(a) Se M_R é noetheriano e f é sobrejetor, então f é um isomorfismo.
(b) Se R é noetheriano a direita, então R satisfaz IBN.
(c) Se M_R é artiniano e f é injetor, então f é um isomorfismo
(d) Se R é artiniano a direita, então R satisfaz IBN.

56.- Seja R um domínio e suponha que existem dois elementos não nulos a e b de R tais que $Ra \cap Rb = 0$.
(a) Mostre que o ideal à esquerda $I = Rb + Rba + Rba^2 + Rba^3 + \cdots$ é isomorfo (como R-módulo) à soma direta infinita $\bigoplus_{i \geq 1} Rba^i$.
(b) Mostre que R não é noetheriano à esquerda.

57.- Mostre que se um domínio R contiver um ideal à direita minimal (entre os ideais à direita $\neq 0$), então R é um anel com divisão. Mostre que, em particular, segue que todo domínio artiniano à direita é um anel com divisão. Também segue que todo dominío que não é um anel com divisão não possui uma série de composição quando considerado como R-módulo.

58.- Seja R um anel e seja $\alpha \colon R \to R$ um automorfismo de R. Mostre que se $R[x; \alpha]$ é noetheriano então R é noetheriano.

59.- Seja R um anel noetheriano. Seja α_1 um automorfismo de R, e α_i um automorfismo de

$$R[x_1; \alpha_1][x_2; \alpha_2] \cdots [x_{i-1}; \alpha_{i-1}]$$

para $i = 2, \ldots, n$. Mostre que $R[x_1; \alpha_1][x_2; \alpha_2] \cdots [x_n; \alpha_n]$, o anel de polinômios iterado, é noetheriano se R for noetheriano.

60.- Seja R um anel e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ automorfismos de R tais que $\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i$. Mostre que podemos estender $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a automorfismos de $R[x_1; \alpha_1]$ definindo $\alpha_i(x_1) = x_1$ para $i = 2, \ldots, n$ e desse jeito, iterando o processo, podemos construir o anel $R[x_1; \alpha_1] \cdots [x_n; \alpha_n]$

61.- Seja k um corpo. Mostre que $k[x_1, \ldots, x_n]$, o anel de polinômios comutativo em n variáveis, é um anel noetheriano.
Seja agora R uma k-àlgebra comutativa e finitamente gerada como k-álgebra (e não necessariamente como k-módulo), então R é uma k-álgebra noetheriana.

62.- Seja R um anel noetheriano à direita, e seja S um subanel do anel de matrizes $M_n(R)$. Se S constiver o subanel $R' = \{rI_n \colon r \in R\}$ (matrizes diagonais onde todos os elementos da diagonal são iguais), então S é noetheriano à direita. Em particular $M_n(R)$ é um anel noetheriano à direita.

63.- Seja V um espaço vetorial sobre um corpo F, T uma transformação linear em V sobre F, e seja $F[x]$ o anel de polinômios na variavel x. Lembra que V é um $F[x]$-módulo se definimos

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)v = a_0 v + a_1(Tv) + a_2(T^2 v) + \cdots + a_m(T^m v),$$

para cada $v \in V$.
Suponha que V tem uma base infinita enumerável $\{e_1, e_2, \ldots\}$.
(a) Seja T a transformação linear tal que $Te_1 = 0$, $Te_{i+1} = e_i$ para $i \geq 1$. Mostre que V munido com a estrutura de $F[x]$-módulo definida a partir de T é artiniano mas não é noetheriano.
(b) Seja T' a transformação linear de V tal que $Te_i = e_{i+1}$ para $i \geq 1$. Mostre que V, com a estrutura de $F[x]$-módulo definida a partir de T' é noetheriano mas não é artiniano.

64.- Seja F um corpo e seja V um F-espaço vetorial com uma base infinita e enumerável $\{e_i\}_{i \geq 1}$. Seja $R = \mathrm{End}_F(V)$ o anel de transformações lineares de V.
(a) Seja I o conjunto de transformações lineares de V cuja imagem tem dimensão finita. Mostre que I é um ideal de R.
(b) Mostre que $S = R/I$ é um anel simples, i.e. não tem ideais além de 0 e S. Logo as cadeias (próprias) de ideais de S são sempre finitas, i.e. não satisfaz c.c.a. para ideais.
(c) Mostre que S não é noetheriano à direita nem à esquerda, e também não é artiniano à direita nem à esquerda.

65.- Seja $f \colon M_R \to N_R$ um homomorfismo entre R-módulos de comprimento finito. Mostre que
(a) Se f for injetor, então $\mathrm{c}(M) \leq \mathrm{c}(N)$.
(b) Se f for sobrejetor, então $\mathrm{c}(M) \geq \mathrm{c}(N)$.
(c) Se f for um isomorfismo, então $\mathrm{c}(M) = \mathrm{c}(N)$.
(d) Os recíprocos das três questões anteriores são falsos.

66.- Seja M_R um R-módulo de comprimento finito e sejam K e N submódulos de M. Mostre a seguinte fórmula:
$$\mathrm{c}(K+N)+\mathrm{c}(K\cap N)=\mathrm{c}(K)+\mathrm{c}(N).$$
67.- Calcule o comprimento dos seguintes $\mathbb{Z}$-módulos sabendo que p e q são primos: $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z}$ e G onde G é um grupo abeliano finito.
68.- Seja K um corpo e considere o anel de polinômios $K[x]$. Calcule o comprimento como $K[x]$-módulo de $M=K[x]/(f(x))$ onde $f(x)$ é um polinômio de grau n, $f(x)=g(x)h(x)$ com $g(x)$ e $h(x)$ polinômios irredutíveis em $K[x]$. Qual o comprimento de M como K-módulo?
69.- Mostre que um anel comutativo é local se, e somente se, possui um único ideal maximal. Mostre que quando o anel não é comutativo o resultado não é certo, ou seja, encontre um anel não comutativo com um único ideal maximal e que não seja local.
70.- Seja R um anel local.
  (a) Mostre que o anel oposto R^{op} é um anel local
  (b) Mostre que para cada ideal I de R o anel R/I é local.
71.- Seja I um ideal de um anel R tal que I é maximal como ideal à direita. Mostre que R/I^n é um anel local para cada inteiro $n\geq 1$.
72.- Mostre que se um anel R tem um único ideal maximal $\mathfrak{m}$, então centro Z de R é um anel local. (Em particular, o centro de um anel local é um anel local.)
73.- Dizemos que um anel R é *von Neumann regular* se para cada $a\in R$ existe $x\in R$ tal que $a=axa$. Mostre que um anel R é von Neumann regular e local se, e somente se, ele é um anel com divisão.
74.- Mostre que se R é um anel local a igualdade $ab=1$, onde $a,b\in R$, implica que $ba=1$.
75.- Seja R um subanel de um anel com divisão D tal que, para cada $d\in D\setminus\{0\}$, temos que d ou d^{-1} pertence a R. Mostre que R é um anel local.
76.- Um domínio R é chamado *anel de valorização discreta à direita* se existe um elemento $\pi\in R\setminus U(R)$ tal que todo elemento não nulo $a\in R$ pode ser exprimido da forma $\pi^n u$ onde $n\geq 0$ e $u\in U(R)$. Mostre que
  (a) R é um domínio local;
  (b) todo ideal à direita não nulo de R é da forma $\pi^i R$ para algum $i\geq 0$;
  (c) cada $\pi^i R$ é um ideal de R.
  (d) $\bigcap_{i\geq 0}\pi^i R=0$;
  (e) Mostre que um anel de valorização discreta à direita é noetheriano.
  Encontre um exemplo não comutativo de um anel de valorização discreta à direita usando os anéis da forma $R[[x;\alpha]]$.
77.- Seja p um número primo fixado. Definimos o seguinte subconjunto de $\prod_{k\geq 1}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$:
$$R_p=\Big\{a=(\bar a_1,\bar a_2,\bar a_3,\dots)\in\prod_{k\geq 1}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\colon a_k\in\mathbb{Z},\ a_{k+1}\equiv a_k \mod p^k,\ \text{for all } k\geq 1\Big\},$$
  (onde $\bar a_k$ denota a classe do inteiro a_k em $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$).
  (a) Mostre que R_p é um subanel de $\prod_{k\geq 1}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.
  (b) Mostre que R_p é um domínio que contém $\mathbb{Z}$.
  (c) Seja $P=\{a\in R_p\colon \bar a_1=0\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$. Mostre que todo elemento de $R_p\setminus P$ é invertível e que P é um ideal de R. (Logo R_p é um anel local).
  O anel R_p é conhecido como o *anel dos inteiros p-ádicos*.
78.- Seja R um anel e sejam $A\subseteq B\subseteq A\oplus C$ R-módulos. Mostre que $B=A\oplus D$ onde $D=B\cap C$. (Dica: lei modular).
79.- Seja R um anel. Mostre que para um idempotente não nulo $e\in R$ as seguintes afirmações são equivalentes.
  (a) eR é indecomponível como R-módulo à direita.
  (b) Re é indecomponível como R-módulo à esquerda.
  (c) O anel eRe não possui idempotentes diferentes de 0 e e.
  (d) e não pode ser exprimido como $e=\alpha+\beta$ onde α,β são idempotentes não nulos e ortogonais (i.e. $\alpha\beta=\beta\alpha=0$) de R.

80.- Seja R um anel. Mostre que para um idempotente $e \in R$ as seguintes afirmações são equivalentes.
(a) eR é fortemente indecomponível como R-módulo à direita.
(b) Re é fortemente indecomponível como R-módulo à esquerda.
(c) O anel eRe é um anel local.

81.- Seja R um anel (álgebra). Seja N um ideal à direita de R. Denote por $B = \{x \in R \colon xN \subseteq N\}$.
(a) Mostre que B é um subanel (subálgebra) de R com $N \subseteq B$ e que N é um ideal de B.
(b) Mostre que $\mathrm{End}_R(R/N) \cong B/N$ via a função $\phi \mapsto \phi(1) + N$.

82.- Seja R é um anel local. Mostre que todo R-módulo à direita cíclico é indecomponível. (Dica: exercício 81).

83.- Seja $R \neq 0$ um anel e suponha que R_R é de comprimento finito. Mostre que R é um anel local se, e somente se, R não possui idempotentes não triviais.

84.- Seja R um anel e M_R um R-módulo. Suponha que $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ onde S_i e T_j são R-módulos simples à direita para todo i e j. Mostre de duas formas diferentes (Jordan-Hölder e Krull-Schmidt), que $n = m$ e que existe uma permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $S_i = T_{\sigma(i)}$.

85.- Seja R um anel e M_R um R-módulo artiniano ou noetheriano. Suponha que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ onde cada M_i é um R-(sub)módulo fortemente indecomponível. Suponha agora que $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_s$ para certos R-submodulos $N_1, \ldots, N_s$ de M. Mostre que $s \leq r$ e que para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$ existem $i_{j1}, \ldots, i_{js_j} \in \{1, \ldots, r\}$ tais que $N_j \cong M_{i_{j1}} \oplus \cdots \oplus M_{i_{js_j}}$ e $\bigcup_{j=1}^{s} \{i_{j1}, \ldots, i_{js_j}\} = \{1, \ldots, r\}$ onde a união é disjunta.

86.- Seja R um anel, M_R um R-módulo de comprimento finito e N, N', T, W submódulos de M tais que $N \cong N'$ e $M = N \oplus T = N' \oplus W$. Mostre que T e W são R-módulos isomorfos.

87.- Seja R um domínio comutativo e M_R um R-módulo. Definimos

$$\mathcal{T}(M) = \{m \in M \colon ma = 0 \text{ para algum } a \in R \setminus \{0\}\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{T}(M)$ é um R-submódulo de M.
Dizemos que M é um *R-módulo de torção* se $\mathcal{T}(M) = M$, e que M é um *R-módulo livre de torção* se $\mathcal{T}(M) = 0$.
(b) Mostre que $M/\mathcal{T}(M)$ é um R-módulo livre de torção.
(c) Seja M um $\mathbb{Z}$-módulo (i.e. grupo abeliano) finitamente gerado tal que

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/p_1^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{s_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_t^{s_t}\mathbb{Z},$$

onde $r \geq 0$ é um inteiro, $p_1, \ldots, p_t$ são números primos positivos (não necessariamente diferentes), e $s_1, \ldots, s_t$ são inteiros ≥ 1.
Mostre, usando Krull-Schmidt que se

$$M \cong \mathbb{Z}^{r'} \oplus \mathbb{Z}/q_1^{s'_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q_2^{s'_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/q_d^{s'_d}\mathbb{Z},$$

onde $r' \geq 0$ é um inteiro, $q_1, \ldots, q_d$ são números primos positivos (não necessariamente diferentes), e $s'_1, \ldots, s'_d$ são inteiros ≥ 1, então $r = r'$, $t = d$ e, após uma reordenação se for necessário, $p_1 = q_1, \ldots, p_t = q_t$, $s_1 = s'_1, \ldots, s_t = s'_t$.
(Lembrete: todo grupo abeliano finitamente gerado possui uma decomposição como M.)
(d) Seja F um corpo e $F[x]$ o anel de polinômios na variável x. Seja M um $F[x]$-módulo finitamente gerado tal que

$$M \cong F[x]^r \oplus F[x]/p_1(x)^{s_1}F[x] \oplus \cdots \oplus F[x]/p_t(x)^{s_t}F[x],$$

onde $r \geq 0$ é um inteiro, $p_1, \ldots, p_t$ são polinômios mónicos irredutíveis (não necessariamente diferentes), e $s_1, \ldots, s_t$ são inteiros ≥ 1. Mostre, usando Krull-Schmidt que se

$$M \cong F[x]^{r'} \oplus F[x]/q_1(x)^{s'_1}F[x] \oplus F[x]/q_2(x)^{s'_2}F[x] \oplus \cdots \oplus F[x]/q_d(x)^{s'_d}F[x],$$

onde $r' \geq 0$ é um inteiro, $q_1, \ldots, q_d$ são polinômios mónicos irredutíveis (não necessariamente diferentes), e $s'_1, \ldots, s'_d$ são inteiros ≥ 1, então $r = r'$, $t = d$ e, após uma reordenação se for necessário, $p_1 = q_1, \ldots, p_t = q_t$, $s_1 = s'_1, \ldots, s_t = s'_t$.
(Lembrete: todo $F[x]$-módulo finitamente gerado possui uma decomposição como M)

88.- Seja R o subconjunto de $\mathbb{C}$ definido por

$$R = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Mostre que R é um subanel de $\mathbb{C}$ e mostre que R é um anel noetheriano.
(b) Seja I o ideal de R gerado por $\{2, 1+\sqrt{-5}\}$. Seja $N \colon R \to \mathbb{Z}$ dada por $N(a+b\sqrt{-5}) = (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$.
  (i) Mostre que $N(xy) = N(x)N(y)$ para todo $x, y \in R$.
  (ii) Mostre que não existe $x \in R$ tal que $N(x) = 2$.
  (iii) Mostre que I não é um R-módulo cíclico.
  (iv) Conclua que $R_R \not\cong I_R$ (como R-módulos).
(c) Mostre que R_R e I_R são R-módulos indecomponíveis.
(d) Considere as matrizes $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-5} & 2 \\ 2\sqrt{-5} & 3+\sqrt{-5} \end{pmatrix}, \qquad B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{-5} & -2 \\ -2\sqrt{-5} & 1+\sqrt{-5} \end{pmatrix}.$$

  (i) Mostre que B é a inversa de A.
  (ii) Mostre que $\varphi \colon R \oplus R \to I \oplus I$ definida por $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, para todos $x, y \in R$, está bem definida e é um homomorfismo de R-módulos.
  (iii) Mostre que $\psi \colon I \oplus I \to R \oplus R$ definida por $\psi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = B\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ para todos $u, v \in I$ está bem definida e é um homomorfismo de R-módulos.
  (iv) Conclua que os R-módulos $R \oplus R$ e $I \oplus I$ são isomorfos.

89.- Seja X um conjunto. Definimos no conjunto das partes de X, indicado por $\mathcal{P}(X)$, as seguintes operações:

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \qquad A \cdot B = A \cap B,$$

para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$ e onde A^c denota o complementário de A (em X).
(a) Mostre que $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ é um anel comutativo com $1 = X$ e $0 = \{\emptyset\}$, e que $A^2 = A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
(b) Seja I um ideal de $\mathcal{P}(X)$ e seja $A \subseteq X$, $A \in I$. Se $a \in A$, mostre que $\{a\} \in I$ e $A \setminus \{a\} \in I$. Além disso, mostre que $I = J_a \oplus I_a$ onde J_a e I_a são ideais de $\mathcal{P}(X)$ dados por $J_a = \{\{a\}, \{\emptyset\}\}$, o ideal gerado por $\{a\}$, e $I_a = \{C \setminus \{a\} \colon C \in I\}$.
(c) Suponha que X é um conjunto infinito. Mostre que não existem ideais $I_1, I_2, \ldots, I_s$ de $\mathcal{P}(X)$ indecomponíveis tais que $\mathcal{P}(X) = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$.

90.- Sejam R e S anéis locais e m, n inteiros positivos tais que os anéis de matrizes $M_m(R)$ e $M_n(S)$ são isomorfos. Mostre que $m = n$ e que R e S são anéis isomorfos. (Dica: Krull-Schmidt)

Até, pelo menos, o exercício 103 não é necessário o teorema de Wedderburn-Artin.

91.- Seja D um anel com divisão e M_D um D-módulo à direita e seja $E = \mathrm{End}(M_D)$. Mostre que o E-módulo à esquerda ${}_EM$ é simples. (Dica: o que acontece quando D é um corpo?)

92.- Seja R um anel e M_R um R-módulo semisimples. Mostre que M_R é artiniano se, e somente se, M_R é noetheriano.

93.- Determine quais dos seguintes $\mathbb{Z}$-módulos são semisimples:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

onde $\mathcal{P}$ indica o conjunto de inteiros positivos primos. (Dica: em alguns casos pode ser útil lembrar que um submódulo de um módulo semisimples é semisimples).

94.- Seja R um anel e M_R um R-módulo semisimples. Mostre que se H é uma componente homogênea de M, então H é um $E = \mathrm{End}_R(M)$ submódulo do E-módulo à esquerda ${}_EM$.

95.- Seja $\{F_i \colon i \in I\}$ uma família de corpos. Mostre que $R = \prod_{i \in I} F_i$ é um anel semisimples se, e somente se, o conjunto de índices I é finito. (Dica: Quais seriam as componentes homogêneas?)

96.- Sejam $\mathfrak{A}_i$ $(1 \le i \le n)$ ideais de um anel R, e seja $\mathfrak{A} = \bigcap_i \mathfrak{A}_i$. Se cada $R/\mathfrak{A}_i$ é um anel semisimples, mostre que $R/\mathfrak{A}$ é um anel semisimples. (Dica: cada $R/\mathfrak{A}_i$ é um $R/\mathfrak{A}$-módulo semisimples. Uma outra prova usando o “Chinese Remainder Theorem” se encontra no livro do Lam, Exercises in Classical Ring Theory, exercício 3.20).

97.- Seja R um anel semisimples. Mostre que para todo R-módulo M_R existe um R-módulo N_R tal que $M_R \oplus N_R$ é livre.

98.- Descreva os $\mathbb{Z}$-módulos semisimples e, sendo F um corpo, os $F[x]$-módulos semisimples.

99.- Seja $R = R_1 \times R_2$ o produto de dois anéis R_1 e R_2. Vamos considerar que todo subconjunto M de R_1 está contido em R identificando M com $\{(m, 0) \mid m \in M\}$. Suponha que M é um ideal à direita de R_1. Mostre as seguintes afirmações.

(a) M é um ideal à direita de R.
(b) $\operatorname{End}(M_R) = \operatorname{End}(M_{R_1})$.
(c) $\operatorname{Hom}_R(M, R) = \operatorname{Hom}_R(M, R_1) = \operatorname{Hom}_{R_1}(M_{R_1})$.
(d) $\{R_1\text{-submódulos de } M\} = \{R\text{-submódulos de } M\}$.
(e) M é um ideal à direita minimal de R se, e somente se, M é um ideal à direita minimal de R_1.
(f) Todo ideal minimal à direita de R é um ideal minimal de R_1 ou um ideal minimal de R_2.
(g) R_1 e R_2 são anéis semisimples se, e somente se, $R_1 \times R_2$ é um anel semisimples.

100.- Seja R um anel. Mostre as seguintes afirmações.

(a) Se N é um ideal á direita minimal de R, e $x \in R$, então ou $xN = 0$ ou xN é um ideal à direita minimal de R tal que $xN \cong N$ como R-módulos.
(b) As seguintes afirmações sobre ideais à direita minimais N_1 e N_2 de um anel semisimples R são equivalentes.
   (i) $N_1 \cong N_2$ como R-módulos.
   (ii) Existe $x \in N_1$ tal que $N_1 = xN_2$.
   (iii) $N_1N_2 \neq 0$.

   (Dica: para (i) implica (ii), existe N_2' tal que $N_2 \oplus N_2' = R$ logo $N_2 = eR$ para algum idempotente e, logo se $\varphi\colon N_2 \to N_1$ é um isomorfismo temos que $N_1 = \varphi(eR) = \varphi(e)eR$).
(c) Suponha que R é um anel semisimples. Mostre que $R = B_1 \times \cdots \times B_n$ para alguns anéis simples $B_1, \ldots, B_n$ (i.e. os únicos ideais são 0 e $\sum_{i\in I} B_i$ onde $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$). (Dica: os B_i's são as componentes homogêneas de R_R e use (b)).
(d) Mostre que se $f\colon R \to S$ é um homomorfismo de anéis sobrejetor e R é um anel semisimples, então S é um anel semisimples.
(e) Mostre que se $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r = C_1 \oplus \cdots \oplus C_s$ onde B_i, C_j são ideais de R que são anéis simples. Então $r = s$, e $B_i = C_i$ após reordenar os índices.

101.- Seja $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ um anel semisimples onde cada R_i é um anel simples. Para cada índice i, seja e_i o idempotente central de R tal que $R_i = e_iR$ (veja o exercício 12). Dado um R-módulo à direita M_R, denota por $M_i = Me_i$. Mostre as seguintes afirmações (nota que só precisamos que R seja semisimples nas duas últimas):

(a) Se $i \neq j$, então $e_ie_j = 0$.
(b) M_i é um R-submódulo de M, e $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.
(c) $R_j \subseteq \operatorname{ann} M_i$ para todo $i \neq j$.
(d) Dizemos que um R-módulo W é *fidel* se o único elemento $a \in R$ tal que $Wa = 0$ é $a = 0$. Mostre que M é fidel se, e somente se, $M_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$.
(e) M é um R-módulo fidel se, e somente se, todo ideal à direita minimal de R é isomorfo a um somando direto de M.

102.- Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F, T uma transformação linear em V sobre F, e seja $F[x]$ o anel de polinômios na variavel x. Lembra que V é um $F[x]$-módulo se definimos

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m)v = a_0v + a_1(Tv) + a_2(T^v) + \cdots + a_m(T^mv),$$

para cada $v \in V$. Mostre que V é um $F[x]$-módulo semisimples se, e somente se, o polinômio mínimo $m(x)$ de T é um produto de polinômios irredutíveis diferentes de $F[x]$.

103.- Seja k um corpo e R uma k-álgebra semisimples.
(a) Mostre que são equivalentes:
(i) R é uma k álgebra simples.
(ii) Todos os ideais minimais à direita de R são isomorfos.
(iii) Todos o R-módulos à direita simples são isomorfos.
(b) Suponha que R é uma k-álgebra simples e suponha que N é um ideal minimal à direita de R. Mostre que se M é um R-módulo à direita, então existe um único número cardinal α tal que $M \cong N^{(\alpha)}$ (a soma direta de α cópias de N).
(c) Suponha que R é simples e de dimensão finita sobre k. Então dois R-módulos à direita M_1 e M_2 são isomorfos se, e somente se, $\dim_k M_1 = \dim_k M_2$.

104.- Sejam R um anel.
(a) Seja M_R um R-módulo semisimples finitamente gerado. Mostre que $E = \mathrm{End}_R(M)$ é um anel semisimples e ${}_EM$ um E-módulo semisimples.
(b) Mostre que se R é semisimples (artiniano simples), então o anel de matrizes $M_n(R)$ é semisimples (artiniano simples). (Dica: $M_n(R)$ é o anel de endomorfismos do R-módulo R^n_R)
(c) Mostre que se $S_1, S_2, \ldots, S_r$ são anéis, então $M_n(S_1 \times \cdots \times S_r) \cong M_n(S_1) \times \cdots \times M_n(S_r)$.
(d) Seja S um anel, mostre que $M_n(M_m(S)) \cong M_{nm}(S)$.
(e) Mostre, de novo, que se R é semisimples (artiniano simples), então o anel de matrizes $M_n(R)$ é semisimples (artiniano simples). (Dica: aplique (c), (d) ao teorema de Wedderburn-Artin)

105.- *Informação:* O enunciado do exercício 104a é verdadeiro sem a hipótese de que M_R é finitamente gerado. Para prová-lo suponha que $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$ onde cada S_i é um R-módulo à direita simples. Para cada $0 \neq s \in S_i$ mostre que Es é um E-módulo simples. Assim temos que $M = \sum_i \sum_{s\in S_i\setminus\{0\}} Es$. Para provar que Es é simples pode fazer o seguinte: suponha que $f(s) \neq 0$ para algum $f \in E$. Observa que $f(S_i)$ é um R-módulo simples isomorfo a S_i. Dado $f(s)$, existe um isomorfismo $g\colon f(S_i) \to S_i$ tal que $g(f(s)) = s$. Podemos estender g a um endomorfismo de M. Assim temos que $Ef(s) = Es$.

106.- Seja R um domínio. Mostre que se o anel $M_n(R)$ é semisimples, então R é um anel com divisão. (Dica: Exercício 57)

107.- Mostre que o centro de um anel semisimples é um produto finito de corpos.

108.- Mostre que a seguinte afirmação é falsa: "Se I é um ideal minimal à esquerda de um anel R, então $M_n(I)$ é um ideal minimal à esquerda de $M_n(R)$."

109.- Mostre que existem anéis simples que não são semisimples. (Dica: exercício 64b).

110.- (a) Sejam R e S anéis tais que $M_n(R) \cong M_n(S)$. Implica isso que $m = n$ e $R \cong S$? (Dica: pense no que acontece quando R e S são anéis de matrizes sobre um corpo).
(b) Dizemos que um anel R é um *anel matricial* se $R \cong M_m(S)$ para algum inteiro $m \geq 1$ e algum anel S. Mostre que a imagem por um homomorfismo de anéis de um anel matricial é um anel matricial. (Dica: exercício 6).

111.- Seja R um anel semisimples.
(a) Mostre que se $a, b \in R$ são tais que $ab = 1$, então $ba = 1$.
(b) Se $a \in R$ é tal que $I = aR$ é um ideal de R, então $I = Ra$.
(c) Todo elemento $a \in R$ pode ser expresso da forma $a = ue$ onde $u, e \in R$, u é invertível e e é um idempotente.

(Dica para o exercício todo: pense em R como um produto de anel de matrizes, como são os ideais nesse tipo de anéis)

112.- Dado um subconjunto S de um anel R. definimos $\mathrm{ann}_l(S) = \{a \in R\colon aS = 0\}$ e $\mathrm{ann}_r(S) = \{a \in R\colon Sa = 0\}$. Sejam R um anel semisimples, I um ideal à esquerda e J um ideal à direita de R. Mostre que $\mathrm{ann}_l(\mathrm{ann}_r(I)) = I$ e $\mathrm{ann}_r(\mathrm{ann}_l(J)) = J$. (Dica: existe um idempotente e tal que $I = Re$ e $R = Re + R(1-e)$).

113.- Seja R um anel simples que é de dimensão finita sobre o seu centro k (k é um corpo pelo exercício 2b). Seja M_R um R-módulo à direita finitamente gerado e seja $E = \mathrm{End}_R(M)$. Mostre que

$$(\dim_k M)^2 = (\dim_k R)(\dim_k E).$$

(Dica: R é um anel artiniano simples, com um único módulo simples. Tente expressar as dimensões em termos da dimensão do anel de endomorfismos desse módulo simples.)

114.- Sejam R e S um anéis, e M_R um R-módulo à direita e seja $E = \mathrm{End}_R(M_R)$

(a) Mostre que são equivalentes

(i) M_R é um S-R-bimódulo.

(ii) Existe um homomofismo de anéis $S \to E$.

(b) Mostre que existe um homomorfismo de anéis $R \to \mathrm{End}_E({}_E M)$ cujo núcleo é o anulador $\mathrm{ann}(M)$ (veja exercício 22).

(c) Qual o anulador de M como E-módulo à esquerda?

115.- Seja R um anel e considere sua estrutura natural de (R, R)-bimódulo. Mostre que os (R,R)-bimódulos contidos em R (com respeito ao produto e soma herdados) são os ideais de R.

116.- (a) Seja R um anel e M_R um R-módulo à direita. Definimos o *dual* M^* de M como $M^* = \mathrm{Hom}_R(M_R, R_R)$. Mostre que M^* tem estrutura de $(R, \mathrm{End}_R(M))$-bimódulo e de $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo.

(b) Seja k um corpo e V um k-espaço vetorial. Considere V como um $(k$-$k)$-módulo e k como um (k, k)-módulo da forma usual. Mostre que a estrutura de k-k-módulo de V^* obtida em teoria coincide com a estrutura de k-espaço vetorial que voçê já conhecia de álgebra linear.

(c) Seja k um corpo, V e W k-espaços vetoriais. Considere V e W como $(k$-$k)$-módulos. Mostre que a estrutura de k-k-módulo de $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ obtida em teoria coincide com a estrutura de k-espaço vetorial que voçê já conhecia de álgebra linear.

117.- Seja M um (R, R)-bimódulo e seja $S = R \oplus M$. Mostre que as operações

$$(r, x) + (r', x') = (r + r', x + x'), \quad (r, x)(r, x') = (rr', rx' + xr'), \qquad \forall r, r' \in R,\ x, x' \in M,$$

fazem de S um anel com $1_S = (1, 0)$. Mostre também que contém o subanel de elementos da forma $(r, 0)$ e o ideal de elementos da forma $(0, x)$. Se identificamos esses elementos com R e M respectivamente, então $S = R \oplus M$ e $M^2 = 0$.

118.- Sejam R e S anéis, e seja M um $(R$-$S)$-bimódulo. Forme o anel $T = R \oplus S$. Mostre que M é munido de uma estrutura de T-T-bimódulo definindo para cada $(r, s) \in T$, $x \in M$

$$(r, s)x = rx, \quad x(r, s) = xs.$$

Aplique a construção do exercício 117 para definir um anel determinado por R, S e M como um conjunto de triplas (r, s, x).

119.- Seja R um anel e seja ${}_R M_R$ um (R, R)-bimódulo. Dizemos que uma função $\delta \colon R \to M$ é uma *derivação* se, para todo $a, b \in R$,

$$\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b), \qquad \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Considere o anel S construído no exercício 117. Mostre que uma função $\delta \colon R \to M$ é uma derivação se, e somente se, a função $R \to S$, $a \mapsto (a, \delta(a))$ é um homomorfismo de anéis.

120.- Sejam R um anel, M_R um R-módulo à direita e ${}_R N$ um R-módulo à esquerda. Seja R^{op} o anel oposto de R. Lembre que se M é um R^{op}-módulo à esquerda e N é um R^{op}-módulo à direita. Seja $\tau \colon M \otimes_R N \to N \otimes_{R^{op}} M$, definido por $\tau(m \otimes n) = n \otimes m$.

(a) Mostre que τ é um isomorfismo de grupos abelianos.

(b) Mostre que se R for um anel comutativo, então τ é um isomorfismo de R-módulos.

(c) Sejam $f \colon M \to M'$ e $g \colon N \to N'$ homomorfismos de R-módulos, e considere $\tau' \colon M' \otimes_R N' \to N' \otimes_{R^{op}} M'$, definido por $\tau(m' \otimes n') = n' \otimes m'$. Mostre que f e g são homomorfismos de R^{op}-módulos e que $\tau'(f \otimes g) = (g \otimes f)\tau$.

121.- Seja R um anel, I um ideal à direita de R e $_RM$ um R-módulo à direita.
(a) Mostre que $IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \colon a_i \in I,\ x_i \in M,\ n \geq 0\}$ é um subgrupo (abeliano) de M. Se R for um ideal, IM é um R-submódulo de M.
(b) Mostre que existe um isomorfismo de grupos abelianos

$$f\colon \frac{R}{I} \otimes_R M \to \frac{M}{IM}$$

tal que $f((a+I)\otimes x) = ax + IM$. Se I um ideal, de R-módulos à esquerda.
(c) Se J for um ideal à esquerda de R, mostre que $R/I \otimes_R R/J$ é isomorfo como grupo abeliano ao grupo $R/(I+J)$. Se I e J forem ideais, mostre que o isomorfismo é de R-bimódulos.
(d) Sejam m, n inteiros ≥ 1 e $d = \mathrm{mdc}(m,n)$. Mostre que o grupo abeliano $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
(e) Seja K um corpo e consideremos o anel de polinômios $K[x]$. Sejam $m(x), n(x)$ dois polinômios em $K[x]$, e $d(x) = \mathrm{mdc}(m(x), n(x))$. Mostre que o grupo abeliano

$$\frac{K[x]}{m(x)K[x]} \otimes_{K[x]} \frac{K[x]}{n(x)K[x]}$$

é isomorfo a $K[x]/d(x)K[x]$.

122.- (a) Sejam A e B dois grupos abelianos finitamente gerados. Calcule $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. (Dica: exercício 121(d) e lembrete do exercício 87(c))
(b) Seja A um grupo abeliano finitamente gerado. Calcule $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
(c) Seja A um grupo abeliano finitamente gerado. Calcule $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(d) Mostre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.
(e) Sejam A e B dois $F[x]$-módulos finitamente gerados. Calcule $A \otimes_{F[x]} B$. (Dica: exercício 121(e) e lembrete do exercício 87(d))

123.- Seja F um corpo e K um corpo contendo F. Suponha que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F e seja $T \in \mathrm{End}_F(V)$. Se $\mathcal{B} = \{v_i\}$ é uma base de V, então $\mathcal{C} = \{1 \otimes v_i \colon v_i \in \mathcal{B}\}$ é uma base de $K \otimes_F V$. Mostre que a matriz de T na base $\mathcal{B}$ é a mesma que a matriz de $1 \otimes T \in \mathrm{End}_K(K \otimes_F V)$ na base $\mathcal{C}$.

124.- Seja R um anel comutativo e sejam M e N R-módulos livre com bases $\mathcal{B} = \{u_i\}_{i=1}^{m}$ e $\mathcal{C} = \{v_j\}_{j=1}^{n}$, respectivamente.
(a) Mostre que $M \otimes_R N$ é um R-módulo livre com base

$$\mathcal{D} = \{u_1 \otimes v_1, \ldots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \ldots u_2 \otimes v_n, \ldots, u_m \otimes v_1, \ldots, u_m \otimes v_n\}.$$

(b) Sejam M' e N' R-módulos livres com bases $\mathcal{B}' = \{u'_i\}_{i=1}^{p}$ e $\mathcal{C}' = \{v'_j\}_{j=1}^{q}$, respectivamente. E seja

$$\mathcal{D}' = \{u'_1 \otimes v'_1, \ldots, u'_1 \otimes v'_q, u'_2 \otimes v'_1, \ldots u'_2 \otimes v'_q, \ldots, u'_p \otimes v'_1, \ldots, u'_p \otimes v'_q\},$$

a respectiva base de $M' \otimes_R N'$. Sejam $f\colon M \to M'$ e $g\colon N \to N'$ homomorfismos de R-módulos com matrizes $A = [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = (a_{pi})$ (a coluna i são as coordenadas de $f(u_i)$) e $B = [g]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = (b_{qj})$ respectivamente. Calcule a matriz de $f \otimes g$, mais concretamente mostre que

$$[f \otimes g]_{\mathcal{D}'\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1}B & a_{q2}B & \cdots & a_{qn}B \end{pmatrix}.$$

125.- Sejam M um grupo abeliano, p um número primo e $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \{\frac{a}{p^n} \colon a, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$. Seja $\phi_p\colon M \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, $x \mapsto x \otimes 1$. Mostre que $\ker \phi_p = \{x \in M \colon xp^n = 0$ para algum inteiro $n \geq 1\}$.

126.- Seja R um anel. Considere o $(R, M_n(R))$-bimódulo ${}^nR = \{(y_1, \ldots, y_n) \colon y_1, \ldots, y_n \in R\}$ e o $(M_m(R), R)$-bimódulo $R^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \colon x_1, \ldots, x_m \in R \right\}$. Mostre que $R^m \otimes_R {}^nR$ é isomorfo a $M_{m \times n}(R)$ como $(M_m(R), M_n(R))$-bimódulos.

127.- Mostre que não existem grupos abelianos N tais que $\mathbb{Q} \oplus N$ seja um $\mathbb{Z}$-módulo livre.

128.- Sejam R, S, T anéis. Sejam M, M' dois (R,S)-bimódulos e N, N' dois (S,T)-bimódulos. Dizemos que $f\colon M \to M'$ é um *homomorfismo de* (R,S)*-bimódulos* se f é um homomorfismo de R-módulos à esquerda e de S-módulos à esquerda. Mostre que se $g\colon N \to N'$ é um homomorfismo de (S,T)-bimódulos então $f \otimes g\colon M \otimes N \to M' \otimes N'$ é um homomorfismo de (R,T)-bimódulos.

129.- (a) Mostre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ são isomorfos como $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais. (Dica: todo elemento de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ pode ser expresso como $\frac{a}{b} \otimes 1$).
(b) Sejam M e N $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais. Observe que M e N também são $\mathbb{Z}$-módulos. Mostre que $M \otimes_{\mathbb{Q}} N$ e $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ são $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais isomorfos. (Dica: $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} N$).

130.- Mostre que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ não são isomorfos como $\mathbb{R}$-espaços vetoriais.

131.- Seja K um anel comutativo. Sejam M e N K-módulos. Denotamos M^* e N^* os respectivos duais, i.e. $M^* = \operatorname{Hom}_K(M, K)$, que tem estrutura de K-módulo. Verifique que se $f \in M^*$ e $g \in N^*$, então a função $M \times N \to K$, $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ é uma função K-bilinear de $M \times N$ em K. Logo existe uma única $h \in (M \otimes_K N)^*$ tal que $h(x \otimes y) = f(x)g(y)$.
(a) Mostre que existe um homomorfismo de K-modulos $\varphi\colon M^* \otimes_K N^* \to (M \otimes_K N)^*$ tal que $f \otimes g \mapsto h$.
(b) Mostre que φ é um isomorfismo de K-módulos se M e N são K-módulos livres finitamente gerados. (Dica: M^*, N^* e $(M \otimes_K N)^*$ são K-módulos livres, encontre bases)
(c) Suponha que M e N são somandos diretos de módulos livres finitamente gerados, i.e. existem K-módulos M' e N' tais que $M \oplus M'$ e $N \oplus N'$ são K-módulos livres finitamente gerados. Mostre que φ ainda é um isomorfismo.
(d) Se K for um corpo, mostre que φ é injetor (sem importar se M e N são finitamente gerados).

132.- Seja R um anel, M_R e N_R R-módulos à direita. Denotamos por $M^* = \operatorname{Hom}_R(M_R, R_R)$. Para cada $y \in N$ e $\alpha \in M^*$ definimos $(y \times \alpha)\colon M_R \to N_R$, $(y \times \alpha)(x) = y(\alpha(x))$.
(a) Mostre que $(y \times \alpha) \in \operatorname{Hom}_R(M_R, N_R)$
(b) Lembre que M^* é um R-módulo à esquerda. Mostre que existe um homomorfismo de grupos abelianos $\tau\colon N \otimes_R M^* \to \operatorname{Hom}_R(M_R, N_R)$, $y \otimes \alpha \mapsto (y \times \alpha)$.
(c) Se M é livre com base $\{e_i\}_{i=1}^n$, mostre que τ é um isomorfismo.
(d) Se R é um anel comutativo, $\sigma\colon M \otimes_R M^* \to R$, $x \otimes \alpha \mapsto \alpha(x)$ é um homomorfismo de R-módulos. Além disso, se M_R é livre com base $\{e_i\}_{i=1}^n$, então τ e σ induzem um homomorfismo de R-módulos $\operatorname{End}_R(M) \to R$ que coincide com a traça Tr.
(e) Vamos melhorar o resultado do exercício 131(b). Suponha que R é um anel comutativo, e X um R-módulo. Se M_R é livre com base $\{e_i\}_{i=1}^n$, mostre que existe um isomorfismo de R-módulos $X^* \otimes_R M^* \to (M \otimes_R X)^*$. (Dica: Considere ${}_RX$, X^* é R-módulo à direita, aplique τ e depois o teorema do isomorfismo adjunto.)

133.- Seja S um anel que satisfaz IBN. Mostre, usando produto tensorial, que se existir um homomorfismo de anéis $R \to S$ então R satisfaz IBN. (Dica: S é um R-módulo, considere $R^n \otimes_R S$).

134.- Seja $\mathbb{Z}[i]$ o anel dos inteiros de Gauss (o subanel de $\mathbb{C}$ gerado por $\mathbb{Z}$ e i). Mostre que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{C}$ são anéis isomorfos.

135.- Seja K um anel comutativo. Mostre que as K-álgebras $M_m(K) \otimes_K M_n(K)$ e $M_{mn}(K)$ são isomorfas.

136.- Moste que se R é um anel semisimples, então todos os R-módulos são planos. (Dica: exercício 97)

137.- Seja K um anel comutativo, e $K[x,y]$, $K[x]$, $K[y]$ os anéis de polinômios nas variáveis x e y, x, y, respectivamente. Mostre que as K-álgebras $K[x,y]$ e $K[x] \otimes_K K[y]$ são isomorfas.

138.- Seja K um anel comutativo. Dado um grupo G escrevemos $K[G]$ para denotar a K-álgebra de grupo. Dados dois grupos G, H, mostre que as K-álgebras $K[G \times H]$ e $K[G] \otimes_K K[H]$ são isomorfas.

139.- Seja F um corpo. Suponha que A, B e C são F-álgebras. Mostre que A é isomorfa a $B \otimes_F C$ se, e somente se, A contém subalgebras B' e C' tais que satisfazem as seguintes condições:
(i) $B' \cong B$ e $C' \cong C$ como F-álgebras,
(ii) os elementos de B' comutan com os elementos de C'
(iii) existem F-bases $\{x_i\colon i \in I\}$ de B' e $\{y_j\colon j \in J\}$ de C' tais que $\{x_i y_j\colon (i,j) \in I \times J\}$ é uma base de A.
Se A for de dimensão finita, (iii) pode ser substituida por
(iv) A está gerada como F-álgebra por $B' \cup C'$ e $\dim_F A = (\dim_F B)(\dim_F C)$.

140.- Seja k um anel comutativa e R uma k-álgebra. Definimos a *k-álgebra envolvente* R^e de R como $R^e = R \otimes_k R^{op}$. Mostre que R é um R^e-módulo à esquerda cujos submódulos são os ideais de R. Mostre que se R é simples, então R é um R^e-módulo simples.

141.- Seja R um anel. Dada uma sequência exata de R-módulos à direita de comprimento finito,

$$0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_r \to 0,$$

mostre que $\sum_{i=1}^{r}(-1)^i c(M_i) = 0$, onde $c(M_i)$ denota o comprimento de M_i.

142.- Dado um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"'] & B' \arrow[r, "q"'] & B''
\end{tikzcd}$$

mostre que existe um único homomorfismo de R-módulos fazendo o diagrama aumentado comutativo. Além disso, mostre que se f e g são isomorfismos, então f é um isomorfismo.

143.- (Lema dos cinco) Considere um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

(a) Se h_2 e h_4 são sobrejetores e h_5 injetor, mostre que h_3 é sobrejetor.
(b) Se h_2 e h_4 são injetores e h_1 é sobrejetor, mostre que h_3 é injetor.
(c) Se h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos, mostre que h_3 é um isomorfismo.

144.- Encontre um exemplo de um diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita com linhas exatas h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

tal que não exista um homomorfismo de R-módulos à direita $h_3\colon A_3 \to B_3$ fazendo o diagrama comutativo. (Dica: pense em sequências exatas curtas não equivalentes)

145.- Sejam $0 \to M_i' \overset{\alpha_i}{\to} M_i \overset{\beta_i}{\to} M_i'' \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, sequências exatas curtas de R-módulos à direita. Mostre que a sequência

$$0 \longrightarrow M_1' \oplus \cdots \oplus M_n' \xrightarrow{\alpha} M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \xrightarrow{\beta} M_1'' \oplus \cdots \oplus M_n'' \longrightarrow 0$$

é exata, onde α e β denotam os homomorfismos induzidos pelos α_i e β_i.

146.- Seja $\alpha\colon M \to N$ um homomorfismo de R-módulos à direita. Definimos o *conúcleo* de α como o R-módulo quociente $\operatorname{coker}\alpha = N/\operatorname{im}\alpha$ (junto com a projeção canônica $N \to N/\operatorname{im}\alpha$).

Mostre que os homomorfismos de R-módulos à direita $\alpha\colon L \to M$ e $\beta\colon M \to N$ induzem a sequência exata

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta\alpha \to \ker\beta \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to 0$$

147.- (Lema da cobra) Esse resultado é importante em álgebra homológica. Considere o seguinte diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos à direita tal que as duas linhas são exatas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\nu'"] & N \arrow[r, "\nu"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Construa um *homomorfismo conetor* $\delta\colon \ker\alpha'' \to \operatorname{coker}\alpha'$ como segue: dado $y \in \ker\alpha''$, escolha $m \in M$ tal que $\mu(m) = y$ e observa que $\alpha(m) = \nu'(n')$ para algum $n' \in N'$. Então defina $\delta(y) = \overline{n'} \in \operatorname{coker}\alpha'$.

Mostre que δ é um homomorfismo de R-módulos bem definido tal que a seguinte sequência de homomorfismos de R-módulos é exata

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \ker\alpha' \arrow[r] & \ker\alpha \arrow[r] & \ker\alpha'' \arrow[dll, "\delta"] & \\
 & & \operatorname{coker}\alpha' \arrow[r] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{coker}\alpha'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

148.- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Sejam A, B objetos de $\mathcal{C}$.

(a) Mostre que o morfismo identidade 1_A é único.

(b) Dizemos que um morfismo $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A,B)$ é um *isomorfismo* se existir $g \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(B,A)$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$. O morfismo g é chamado o *inverso* de f. Mostre que o inverso de um isomorfismo é único.

(c) Moste que um isomorfismo é um epimorfismo e um monomorfismo.

149.- (a) Mostre que um morfismo em $\mathcal{S}ets$ é um monomorfismo se, e somente se, for injetor.

(b) Mostre que um morfismo em $\mathcal{S}ets$ é um epimorfismo se, e somente se, for sobrejetor.

(c) Mostre que para qualquer subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}ets$, um morfismo sobrejetor é um epimorfismo. Como consequência obtenha que nas categorias Mod-R, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ings$, $\mathcal{T}op$, …um morfismo sobrejetor é um epimorfismo.

(d) Mostre que para qualquer subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}ets$, um morfismo injetor é um monomorfismo. Como consequência obtenha que nas categorias Mod-R, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ings$, $\mathcal{T}op$, …um morfismo injetor é um monomorfismo.

150.- Dizemos que um grupo abeliano D é *divisível* se, para cada $x \in D$ e cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x' \in D$ tal que $x = nx' = x' + \overset{(n}{\cdots} + x'$.

(a) Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ são divisíveis.

(b) Mostre que a imagem homomórfica de um grupo abeliano divisível é divisível.

(c) Mostre que a subcategoria dos grupos divisíveis $\mathcal{DA}b$ é uma categoria plena de $\mathcal{A}b$.

(d) Mostre que a projeção canônica $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um monomorfismo em $\mathcal{DA}b$ mas não é injetor.

151.- Dadas um par de categorias à direita $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos formar a *categoria produto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ como segue. Os objetos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ são pares (C, D), onde C é um objeto de $\mathcal{C}$ e D um objeto de $\mathcal{D}$. E um morfismo

$$(\gamma, \delta)\colon (C, D) \to (C'', D'')$$

em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par de morfismos

$$\gamma\colon C \to C'', \quad \delta\colon D \to D'',$$

pertencentes a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente.

A composição é dada pela regra

$$(\gamma, \delta)(\gamma', \delta') = (\gamma\gamma', \delta\delta'),$$

onde $(\gamma', \delta')\colon (C', D') \to (C, D)$. Mostre que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma categoria à direita, sendo $(1_C, 1_D)$ o morfismo identidade de um par (C, D).

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ fossem categorias à esquerda, faça as mudanças nas definições anteriores para obter uma categoria à esquerda.

Se as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ fossem de diferentes quiralidades, mostre como deveríamos definir a composição (usando a categoria espelho), de forma que obtenhamos uma categoria à direita.

152.- Sejam R e S anéis e $T = R \times S$. Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de Mod-R e seja $\mathcal{D}$ uma subcategoria de Mod-S. Mostre que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma subcategoria de Mod-T. (Dica: um objeto (C, D) de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ pode ser considerado como um T-módulo $(c, d)(r, s) = (cr, ds)$).

153.- Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ categorias. Sejam $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores.

(a) Mostre que F é contravariante (covariante) se, e somente se, $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{op} \mathcal{D}^{op}$ é covariante (contravariante).

(b) Definimos $F^{op}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ como $F^{op}(C) = F(C)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, e $F^{op}(f^{op}) = F(f)$ para todo morfismo f em $\mathcal{C}$. Mostre que F^{op} é covariante (contravariante) se, e somente se, F é contravariante (covariante).

(c) Mostre que se F, G são ambos covariantes (contravariantes) então GF é covariante.

(d) Mostre que se F é covariante (contravariante) e G contravariante (covariante) então GF é contravariante.

154.- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $A, B, C \in \mathcal{C}$. Sejam $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(B, C)$. Mostre que

(a) Se f, g são monomorfismos, então gf é monomorfismo.

(b) Se f, g são epimorfismos, então gf é epimorfismo.

(c) Se gf é monomorfismo, então f é monomorfismo.

(d) Se gf é epimorfismo, então g é epimorfismo.

155.- Sejam $\{M_i\colon i \in I\}$ um conjunto de R-módulos à esquerda e $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Mostre que M é um R-módulo plano se, e somente se, M_i é plano para cada $i \in I$.

156.- Seja R um anel e seja M_R um R-módulo à direita. Mostre que se todo R-submódulo finitamente gerado de M é plano, então M_R é plano. (Observação: o recíproco é falso. Por exemplo: seja $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. R_R é plano. Seja N o submódulo de R_R dado por $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Considere a inclusão $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\bar{1} \mapsto \bar{4}$. Mas $N \otimes_R \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to N \otimes_R \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ não é injetora pois $0 \neq \bar{2} \otimes \bar{1} \mapsto \bar{2} \otimes \bar{4} = \bar{8} \otimes \bar{1} = 0$)

157.- Seja R um anel sem unidade, ou seja, um objeto da categoria $\mathcal{R}ngs$. Definimos a *unitização* de R como $U(R) = \{(r, a)\colon r \in R,\ a \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Mostre que $U(R)$ é um anel com a soma e produto dados por

$$(r, a) + (s, b) = (r + s, a + b), \quad (r, a)(s, b) = (rs + br + as, ab),$$

e que a unidade de $U(R)$ é $(0, 1)$.

(b) Mostre que se $f\colon R \to S$ é um morfismo de $\mathcal{R}ngs$, então $U(f)\colon U(R) \to U(S)$, $U(f)(r, a) = (f(r), a)$ é um homomorfismo de anéis.

(c) Mostre que existe uma transformação natural entre os funtores $1_{\mathcal{R}ngs}$ e $U\colon \mathcal{R}ngs \to \mathcal{R}ngs$.

158.- Seja n um inteiro positivo. Considere a categoria $\mathcal{R}ings$ e os funtores $F, G_n\colon \mathcal{R}ings \to \mathcal{R}ings$ onde F envia cada anel em seu anel oposto e G_n envia cada anel em $M_n(R)$. Mostre que a transposição de matrizes define um isomorfismo natural entre os funtores G_nF e FG_n.

159.- Seja R um anel. Para cada inteiro positivo, definimos o funtor $GL_n\colon \mathcal{R}ings \to \mathcal{G}roups$ como segue. Para cada anel R, $GL_n(R)$ denota o grupo das matrizes invertíveis do anel de matrizes $M_n(R)$. Para cada homomorfismo de anéis $f\colon R \to S$, denotamos por $GL_n(f)\colon GL_n(R) \to GL_n(S)$ o homomorfismo de grupos obtido pela restrição do homomorfismo de anéis induzido $M_n(R) \to M_n(S)$ por f.

Mostre que para cada inteiro positivo, a aplicação $\iota_n\colon GL_n(R) \to GL_{n+1}(R)$ dada por

$$A \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

define uma transformação natural entre os funtores GL_n e GL_{n+1}.

160.- (a) Mostre que os funtores $1_{\text{Mod-}R}$, $\operatorname{Hom}_R(R, -)\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R$ são naturalmente equivalentes.

(b) Mostre também que os funtores $1_{R\text{-Mod}}$, $\operatorname{Hom}_R(R, -)\colon R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ são naturalmente equivalentes. (Dica: Note que é importante considerar os morfismos à direita!)

161.- Sejam R e S dois anéis. Definimos T como o anel $T = R \times S$. Mostre que as categorias Mod-T e Mod-$R \times$ Mod-S são naturalmente equivalentes. (Dica: Defina $F\colon$ Mod-$R \times$ Mod-$S \to$ Mod-T como o funtor dado no exercício 152. Suponha agora que N é um T-módulo. Considere $e_R = (1,0), e_S = (0,1)$. Mostre que $Te_R \cong R$ e $Te_S \cong S$ como anéis. Isso induz uma estrutura de R-módulo em Ne_R e de S-módulo em Ne_S. Definimos então $G(N) = Ne_R \times Ne_S$).

162.- Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Sejam $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F', G'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores todos covariantes (contravariantes). Sejam $\eta\colon F \to G$ e $\eta'\colon F' \to G'$ transformações naturais.
 (a) Mostre que existe uma transformação natural $F'F \to G'G$.
 (b) Se $\eta\colon F \to G$ é um isomorfismo natural, defina $\sigma_C\colon GC \to FC$ para todo $C \in \mathcal{C}$, como $\sigma_C = \eta_C^{-1}$. Mostre que σ é uma transformação natural $G \to F$.

163.- (Teorema do isomorfismo adjunto, segunda versão) Sejam R e S anéis. Dados ${}_RA$, ${}_SB_R$ e ${}_SC$, existe um isomorfismo natural

$$\tau'_{A,B,C}\colon \mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)),$$

definido para cada $f\colon B \otimes_R A \to C$, $a \in A$ e $b \in B$, como $\tau'_{A,B,C}(f) = \tau'(f)\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$, $a \mapsto \tau'(f)_a$, onde $\tau'(f)_a\colon B \to C$, $b \mapsto f(b \otimes a)$.

164.- Sejam R e S anéis. Dados ${}_SB_R$ e ${}_SC$, mostre que os funtores

$$\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_S(B, C)),\ \mathrm{Hom}_S(B \otimes_S -, C)\colon R\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$$

são naturalmente isomorfos. (Dica: Exercício 163)

165.- Sejam R e S anéis. Sejam ${}_RM_S$, ${}_RN_S$ (R, S) bimódulos.
 (a) Mostre que $- \otimes_R M$ define um funtor Mod-$R \to$ Mod-S
 (b) Mostre que um homomorfismo de (R, S)-bimódulos $\widehat{\ }\colon M \to N$, $m \mapsto \widehat{m}$, determina uma transformação natural entre $- \otimes_R M$ e $- \otimes_R N$. (Note a importância de ser homomorfismo de (R, S)-bimódulos, não só de R-módulos).
 (c) Seja mod-R a subcategoria plena dos R-módulos à direita finitamente gerados. Mostre que se M é finitamente gerado como S-módulo então ${}_RM_S$ induz um funtor mod-$R \to$ mod-S.
 (d) Seja $\mathcal{F}lat_R$ a subcategoria plena dos R-módulos à direita planos. Mostre que se M é plano como S-módulo, então a restrição de $- \otimes_R M$ induz um funtor $\mathcal{F}lat_R \to \mathcal{F}lat_S$.

166.- Seja R um anel. Sejam A, B, C R-módulos à direita e $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ homomorfismos de R-módulos. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
 (a) A sequência de R-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

 é exata e cinde.
 (b) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\alpha)} \mathrm{Hom}_R(L, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\beta)} \mathrm{Hom}_R(L, C) \longrightarrow 0$$

 é exata e cinde para todo R-módulo à direita L.
 (c) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\alpha)} \mathrm{Hom}_R(L, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\beta)} \mathrm{Hom}_R(L, C) \longrightarrow 0$$

 é exata para todo R-módulo à direita L.
 (d) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,P)} \mathrm{Hom}_R(B, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,P)} \mathrm{Hom}_R(A, P) \longrightarrow 0$$

 é exata e cinde para todo R-módulo à direita P.
 (e) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,P)} \mathrm{Hom}_R(B, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,P)} \mathrm{Hom}_R(A, P) \longrightarrow 0$$

 é exata para todo R-módulo à direita P.

(Dica: prove $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$. Para provar $(c) \Rightarrow (a)$ faça $L = C$).

167.- (a) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Um *coproduto* da família anterior é um par ordenado $(C, \{\eta_i\}_{i\in I})$, onde C é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\eta_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A_i, C)$, verificando a seguinte propriedade universal: se para um objeto X de $\mathcal{C}$ existem morfismos $\gamma_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A_i, X)$ para cada $i \in I$, então existe um único morfismo $\theta\colon C \to X$ tal que $\theta\eta_i = \gamma_i$ para todo $i \in I$. Mostre que o coproduto, quando existir, é único a menos de isomorfismo.

(b) Mostre que o coproduto na categoria de módulos é a soma direta (junto com as inclusões canônicas), e portanto, existe para qualquer família de módulos.

(c) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Um *produto* da família anterior, é um par ordenado $(P, \{\pi_i\}_{i\in I})$, onde P é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\pi_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(P, A_i)$ verificando a seguinte propriedade universal: se para um objeto X de $\mathcal{C}$ existem morfismos $\delta_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(X, A_i)$ para cada $i \in I$, então existe um único morfismo $\phi\colon X \to P$ tal que $\pi_i\phi = \delta_i$ para todo $i \in I$. Mostre que o produto, quando existir, é único a menos de isomorfismo.

(d) Mostre que o produto na categoria de módulos é produto direto (junto com as projeções canônicas), e portanto existe para qualquer família de módulos.

(e) Mostre que os conceitos de produto e coproduto são duais.

(f) Mostre que na categoria dos conjuntos $\mathcal{S}ets$ o coproduto coincide com a união disjunta e o produto com o produto cartesiano.

168.- Considere a categoria $\mathcal{G}roups$ dos grupos e a categoria $\mathcal{A}b$ dos grupos abelianos.

(a) Seja G um grupo e $[G,G]$ o *subgrupo comutador* de G. Ou seja, $[G,G]$ é o subgrupo de G gerado pelos elementos $ghg^{-1}h^{-1}$, $g,h \in G$. É conhecido que $[G,G]$ é um subgrupo normal de G, e que $G/[G,G]$ é abeliano. Além disso, se $f: G \to H$ é um homomorfismo de grupos, $f([G,G]) \subseteq [H,H]$. Assim f induz um homomorfismo entre os grupos abelianos $t_f: G/[G,G] \to H/[H,H]$.

(b) Mostre que $U: \mathcal{G}roups \to \mathcal{A}b$ $U(G) = G/[G,G]$, e $U(f) = t_f$ é um funtor.

(c) Considere $V: \mathcal{A}b \to \mathcal{G}roups$ o funtor inclusão. Mostre que (U,V) é um par adjunto.

169.- Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Sejam $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tais que (F,G) é um par adjunto. Para cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$, seja

$$\tau_{C,D}\colon \mathcal{M}or_{\mathcal{D}}(FC, D) \to \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(C, GD),$$

a bijeção natural.

(a) Se $D = FC$, existe uma bijeção natural

$$\tau_{C,FC}\colon \mathcal{M}or_{\mathcal{D}}(FC, FC) \to \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(C, GFC).$$

Definimos $\eta_C\colon C \to GFC$ como $\eta_C = \tau_{C,FC}(1_{FC})$. Mostre que η é uma transformação natural entre o funtor identidade $1_{\mathcal{C}}$ e o funtor GF.

(b) Se $C = GD$, existe uma bijeção natural

$$\tau^{-1}_{GD,D}\colon \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(GD, GD) \to \mathcal{M}or_{\mathcal{D}}(FGD, D).$$

Definimos $\varepsilon_D\colon FGD \to D$ como $\varepsilon_D = \tau^{-1}_{GD,D}(1_D)$. Mostre que ε é uma transformação natural entre o funtor FG e o funtor identidade $1_{\mathcal{D}}$.

170.- Seja R um anel. Para cada R-módulo M à direita, definimos $\mathrm{soc}(M) = \sum\{S \le M\colon S \text{ é simples}\}$. Mostre que para cada homomorfismo de R-módulos $f\colon M \to N$, temos que $f(\mathrm{soc}(M)) \subseteq \mathrm{soc}(N)$. Mostre que $\mathrm{soc}: \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R$ é um funtor aditivo.

171.- Seja F um funtor covariante aditivo e exato entre categorias de módulos. Mostre que se $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ é uma sequência exata, então $FA \overset{F(\alpha)}{\to} FB \overset{F(\beta)}{\to} FC$ é exata.

172.- Seja $\varphi\colon R \to S$ um homomorfismo de anéis. Podemos considerar S como um R-módulo à esquerda, e todo S-módulo M à direita como um R-módulo fazendo $mr = m\varphi(r)$. Se o R-módulo à direita P_R é um R-módulo plano, então o S-módulo à direita $P' = P \otimes_R S$ é um S-módulo plano. (Dica: para todo ${}_SM$, $S \otimes_S M \cong M$)

173.- Sejam $F\colon \text{Mod-}R \to \mathcal{A}b$ e $G, G'\colon \mathcal{A}b \to \text{Mod-}R$ funtores. Se (F,G) e (F,G') são pares adjuntos, então G é naturalmente isomorfo a G'. (Dica: Para cada R-módulo M_R existem isomorfismos naturais $\text{Hom}_R(M, G-) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(FM, -) \cong \text{Hom}_R(M, G'-)$. Em outras palavras $\text{Hom}_R(M,-) \circ G \cong \text{Hom}_R(M,-) \circ G'$. Fazendo $M = R$, use que $\text{Hom}_R(R,-)$ é naturalmente isomorfo à identidade, exercício 160a.) (Observação: Esse resultado é válido para quaisquer categorias $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e pares adjuntos (F,G) de funtores entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Além disso, também é válido fixando G e funtores F, F' tais que $(F,G), (F',G)$ são pares adjuntos.)

174.- Seja R, S, T anéis. Sejam M um (R,S)-bimódulo, N um (S,T)-bimódulo e $P = M \otimes_S N$. Observe que P é um (R,T)-bimódulo. Mostre que:

(a) Se M for projetivo como R-módulo à esquerda e N projetivo como S-módulo à esquerda, então P é projetivo como R-módulo à esquerda.

(b) Se M for projetivo como S-módulo à direita e N é projetivo como T-módulo à direita, então P é projetivo como T-módulo à direita.

(Dica: (a) para mostrar que $A \to B \to 0$ implica que $\text{Hom}(P,A) \to \text{Hom}(P,B) \to 0$, use o teorema do isomorfismo adjunto varias vezes).

175.- Sejam R e S anéis. Se $\varphi\colon R \to S$ for um homomorfismo de anéis, e ${}_RS$ é um R-módulo projetivo (via φ), então, para todo R-módulo projetivo M_R, $M \otimes_R S$ é um S-módulo projetivo.

176.- Seja R um anel.

(a) Seja $\{P_i\}_{i\in I}$ um conjunto de R-módulos à direita. Mostre que $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetivo se, e somente se, P_i é projetivo para cada $i \in I$.

(b) Seja $\{E_i\}_{i\in I}$ um conjunto de R-módulos à direita. Mostre que $E = \prod_{i\in I} E_i$ é injetivo se, e somente se, E_i é injetivo para cada $i \in I$.

(Dica: exercício 38(a) e (b)).

177.- Seja (F,G) um par adjunto de funtores entre categorias de módulos. Mostre que se G é exato, então F preserva projetivos, ou seja, FP é projetivo para todo módulo projetivo P. Mostre também que se F é exato, então G preserva injetivos, ou seja, GE é injetivo para todo módulo injetivo E.

178.- (Lema da base dual.) Sejam R um anel e P um R-módulo à direita. Dado um conjunto de índices I, dizemos que um par ordenado $(\{x_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$, onde $x_i \in P$ e $\alpha_i \in \text{Hom}_R(P,R)$ para todo $i \in I$, é uma *base dual* para P se para todo $x \in P$ as duas condições abaixo estiverem satisfeitas:

(a) O conjunto $S_x = \{i \in I \colon : \alpha_i(x) \neq 0\}$ é finito,

(b) $x = \sum_{i\in I} x_i \alpha_i(x)$.

Mostre que P é projetivo se, e somente se, P tiver uma base dual. Observação: base dual é um nome, não necessariamente é uma base no sentido que conhecemos. (Dica: Se não conseguir, veja Proposition 3.10 do Rotman, ou (2.9) do livro do Lam, Lectures on Modules and Rings).

179.- (a) Seja k um corpo. Mostre que todo k-módulo é injetivo.

(b) Sejam R e S anéis. Seja Q um (R,S)-bimódulo tal que ${}_RQ$ é um R-módulo plano. Para cada M_S definimos $\widehat{M} = \text{Hom}_S(Q_S, M_S)$, que é um R-módulo à direita.
Mostre que se M_S for injetivo, então $\widehat{M}_R$ é um R-módulo injetivo à direita. (Dica: Teorema do isomorfismo adjunto)

(c) Mostre que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo. Para isso, aplique (a) com $k = \mathbb{Q}$ e (b) com $R = \mathbb{Z}$, $Q = S = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Q}$.

(d) Seja R um anel e seja Q um $\mathbb{Z}$-módulo. Considere $H = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ como um R-módulo à direita. Mostre que se Q é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo, então H é um R-módulo à direita injetivo. Como consequência, mostre que se a característica de R é zero (i.e. não existe inteiro positivo n tal que $1 + \overset{(n}{\cdots} + 1 = 0$), então existem R-módulos injetivos. (Dica: Usando que Q é injetivo mostre que $H \neq 0$.) (Observação: É verdade o resultado mais geral seguinte: para todo anel R, todo R-módulo pode ser incluso em um R-módulo injetivo.)

180.- Seja R um anel e P um R-módulo projetivo finitamente gerado. Seja $(\{x_i\}_{1\leq i\leq n}, \{\alpha_i\}_{1\leq i\leq n})$. Lembre que $P^* = \mathrm{Hom}_R(P,R)$ é um R-módulo à esquerda projetivo (exercício 181(a)). Para cada $x\in P$ definimos $\widehat{x}\in P^{**}$ como $f(\widehat{a}) = f(a)$ para todo $f\in P^*$. Mostre que:

(a) $(\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq n}, \{\widehat{x}_i\}_{1\leq i\leq n})$ é uma base dual para P^*.

(b) P^* é um módulo à esquerda projetivo finitamente gerado (exercício 181(a)).

(c) A aplicação $\varepsilon\colon P\to P^{**}$ definida por $\varepsilon(x) = \widehat{x}$ é um isomorfismo de R-módulos à direita.

(Dica: Se não conseguir, isso aqui é o exercício 2.7 do livro, Lam, Lectures on Modules and Rings, e existe um livro com as soluções dos exercícios do livro do Lam)

181.- Seja R um anel. Consideremos as categorias Mod-R e as subcategorias plenas *proj*-R dos R-módulos projetivos à direita finitamente gerados, e R-*proj* dos R-módulos projetivos à esquerda finitamente gerados.

(a) Mostre que se P é um R-módulo à direita projetivo finitamente gerado, então $D(P) = \mathrm{Hom}_R(P,R)$ é um R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado.

(b) Mostre que se Q é um R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado, então $D'(Q) = \mathrm{Hom}_R(Q,R)$ é um R-módulo à direita projetivo finitamente gerado.

(c) Mostre que D define um funtor contravariante entre as categorias *proj*-R e R-*proj*. Mostre que D' define um funtor contravariante entre as categorias R-*proj* e *proj*-R.

(d) Mostre que D é uma dualidade com "inverso" D', ou seja, $D'D$ é naturalmente isomorfo a $1_{proj\text{-}R}$, e DD' é naturalmente isomorfo a $1_{R\text{-}proj}$.

(Dica: (d) Exercício 180(c))

182.- Outra demostração de que as categorias $\mathcal{C} = Mod\text{-}R$ e $\mathcal{D} = Mod\text{-}M_n(R)$ são equivalentes. Definamos $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ como $FM = M^{(n)}$. Para definir $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ considere o $(M_n(R),R)$-módulo $R^n = \left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} : x_1,\dots,x_n\in R\right\}$. Definimos $GN = N\otimes_{M_n(R)} R^n$ para cada $M_n(R)$-módulo N.

Assim mostre que $M\to M^n\otimes_{M_n(R)} R^n$ dada por $m\mapsto (m,0,\dots,0)\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ é um isomorfismo de R-módulos com inverso $(m_1,\dots,m_n)\otimes\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto m_1a_1+\cdots+m_na_n$.

Mostre que $N\to N\otimes_{M_n(R)} R^n\oplus\cdots\oplus N\otimes_{M_n(R)} R^n$, $y = ye_{11}+\cdots+ye_nn\mapsto ye_{11}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus ye_{nn}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ é um isomorfismo. (Observação: Como se falou na sala de aula, esse exercício não será cobrado na prova, mas é bom vocês conhecerem um jeito melhor de provar o resultado).