MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Exame - 04/07/2015

Exercício obrigatório

1. Sejam R e S anéis. Sejam ${}_RM_S$, ${}_RN_S$ (R,S)-bimódulos.
   (a) Explique como age o funtor $-\otimes_R M\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$.
   (b) Mostre que um homomorfismo de (R,S)-bimódulos $\widehat{}\colon M \to N$, $m \mapsto \widehat{m}$, determina uma transformação natural entre os funtores $-\otimes_R M$, $-\otimes_R N\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$.
   (Note a importância de ser homomorfismo de (R,S)-bimódulos, não só de R-módulos).
   (c) Seja $\mathcal{F}ree_R$ a subcategoria plena dos R-módulos à direita livres. Mostre que se M é livre como S-módulo, então a restrição de $-\otimes_R M$ induz um funtor $\mathcal{F}ree_R \to \mathcal{F}ree_S$.
   (d) Seja $proj_R$ a subcategoria plena dos R-módulos à direita projetivos finitamente gerados. Mostre que se M for projetivo e finitamente gerado como S-módulo, então a restrição de $-\otimes_R M$ induz um funtor $proj_R \to proj_S$.

Escolha 2 exercícios

2. Seja R um anel e M um R-módulo à direita *artiniano* não nulo. Definimos
$$\operatorname{soc}(M) := \sum \{N \leq M\colon N \text{ simples }\}.$$
Definimos $\operatorname{soc}^1(M) := \operatorname{soc}(M)$ e para cada inteiro positivo i,
$$\operatorname{soc}^{i+1}(M) := \left\{ m \in M\colon \overline{m} \in \operatorname{soc}\left(\frac{M}{\operatorname{soc}^i(M)}\right)\right\}$$
Mostre as seguintes afirmações:
   (a) $\operatorname{soc}(M) \neq 0$ e $\operatorname{soc}^i(M) \subseteq \operatorname{soc}^{i+1}(M)$ para todo inteiro positivo i.
   (b) Se $\operatorname{soc}^i(M) \neq M$, então $\operatorname{soc}^i(M) \neq \operatorname{soc}^{i+1}(M)$.
   (c) Seja $\{N_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos à direita não nulos. Se $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ for artiniano, mostre que I é um conjunto finito.
   (d) Existe um inteiro positivo n tal que $\operatorname{soc}^n(M) = M$ se, e somente se, M for de comprimento finito.

3. Seja R um anel semisimples com exatamente três módulos simples (a menos de isomorfismo) e suponha que o comprimento do R-módulo R_R é igual a 8. Segundo o Teorema de Wedderburn-Artin, quais são as possibilidades para o anel R?

4. Seja $\mathcal{ORD}$ a categoria definida como segue:
   - Os objetos de $\mathcal{ORD}$ são os conjuntos da forma $\{1,2,\ldots,n\}$, exatamente um conjunto para cada inteiro positivo n, *munidos da ordem usual*.
   - Os morfismos $\alpha\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ são aplicações que *preservam a ordem*: se $i \leq j$, então $\alpha(i) \leq \alpha(j)$.

   Seja $\mathcal{BF}ree_R$ a categoria definida como segue:
   - Os objetos de $\mathcal{BF}ree_R$ são todos os pares (F,B) onde F é um R-módulo livre à direita com base $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, considerada como conjunto ordenado sob a ordem $f_i < f_j$ se $i < j$.
   - Um morfismo $\alpha\colon (F,B) \to (F',B')$ é um homomorfismo de R-módulos $\alpha\colon F \to F'$ tal que $\alpha(B) \subseteq B'$ e a restrição $\alpha_{|B}\colon B \to B'$ é uma aplicação de B em B' que preserva a ordem.

   Mostre que as categorias $\mathcal{ORD}$ e $\mathcal{BF}ree_R$ são naturalmente equivalentes.

Escolha 1 exercício

5. Seja R um anel. Dizemos que um R-módulo à direita M é *fielmente plano* se satisfaz as duas seguintes condições:
   (i) M é um R-módulo plano,
   (ii) para todo R-módulo à esquerda X, se $M \otimes_R X = 0$, então $X = 0$.

   Mostre as seguintes afirmações:
   (a) Todo R-módulo à direita livre é fielmente plano.
   (b) $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo fielmente plano.
   (c) Se M for um R-módulo à direita fielmente plano e N é um R-módulo à direita plano, então $M \oplus N$ é um R-módulo à direita fielmente plano.
   (d) Suponha que M é um R-módulo à direita plano. Mostre que M é fielmente plano se, e somente se, $M \otimes_R R/I \neq 0$ para todo ideal à esquerda próprio I de R.

6. (a) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto A de $\mathcal{C}$ é chamado um *objeto inicial* se, para cada objeto C de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $A \to C$.
      (i) Mostre que se existirem dois objetos iniciais A e A' em $\mathcal{C}$, então eles são isomorfos.
      (ii) Defina *objeto final* na categoria $\mathcal{C}$ sabendo que é o conceito dual de objeto inicial.

   (b) Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Sejam $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tais que (F, G) é um par adjunto.
      (i) Sejam A um objeto inicial de $\mathcal{C}$ e Z um objeto final de $\mathcal{D}$. Mostre que FA é um objeto inicial de $\mathcal{D}$ e que GZ é um objeto final de $\mathcal{C}$.
      (ii) Sejam $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{D}^{op}$ as categorias opostas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Mostre que (G^{op}, F^{op}) é um par adjunto, onde $G^{op}\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$ e $F^{op}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ são os funtores *opostos*.

Escolha 1 exercício

7. (a) Seja k um corpo. Seja A uma k-álgebra noetheriana e $\alpha\colon A \to A$ um automorfismo de k-álgebras. Seja B uma k-álgebra de dimensão finita. Mostre que $A[x;\alpha] \otimes_k B$ é uma k-álgebra noetheriana.
   (b) Seja k um corpo. Sejam A e B duas k-álgebras. Se $A \otimes_k B$ é uma k-álgebra simples, então A e B são k-álgebras simples.
   (c) Seja R um anel. Dado um R-módulo à direita T de comprimento finito denotamos por $\mathrm{c}(T)$ o comprimento de T.
   Seja M_R um R-módulo de comprimento finito e sejam K e N submódulos de M. Mostre a seguinte fórmula:
   $$\mathrm{c}(K + N) + \mathrm{c}(K \cap N) = \mathrm{c}(K) + \mathrm{c}(N),$$

8. (a) Mostre usando o teorema de Jordan-Holder que um anel semisimples satisfaz IBN.
   (b) Seja R um anel local. Mostre usando o teorema de Krull-Schimidt-Azumaya que R satisfaz IBN.
   (c) Seja R um anel, seja M_R um R-módulo e $f \in \mathrm{End}_R(M_R)$. Mostre as seguintes afirmações:
      (i) Se M_R é noetheriano e f é sobrejetor, então f é um isomorfismo.
      (ii) Se R é noetheriano a direita, então R satisfaz IBN.