Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

Prof. Jorge T. Hiratuka

O espaço $\mathbb{R}^2$ (plano cartesiano)

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano entre A e B é o conjunto definido da seguinte forma:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Definição: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

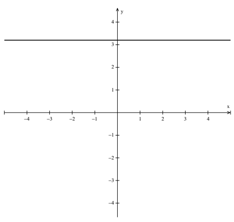
Funções de A em B

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento de B. Denotamos por $f : A \to B$.
$A = \mathrm{Dom}_f = \mathrm{D}_f =$ domínio de f.
$B=$ contradomínio de f.
$\mathrm{Im}_f =$ imagem de $f = \{y \in B : y = f(x), \text{ para algum } x \in A\}$.
$\mathrm{G}_f =$ gráfico de $f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x), \text{ para algum } x \in A\}$
$= \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$

Exemplos de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

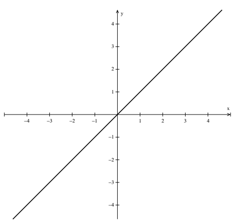
a) $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$ (função costante)

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = \{k\}$



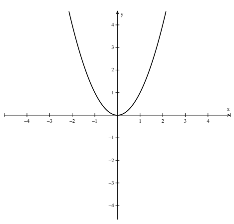
b) $f(x) = x$ (função identidade)

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$



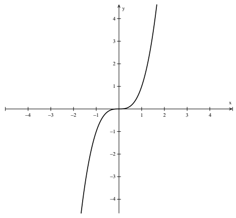
c) $f(x) = x^2$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}_+$



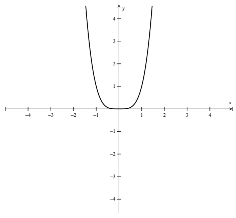
d) $f(x) = x^3$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$



e) $f(x) = x^4$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}_+$

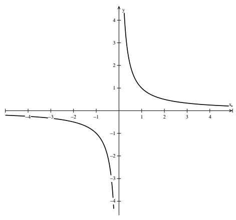


f) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_i \neq 0$ (função polinomial)

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

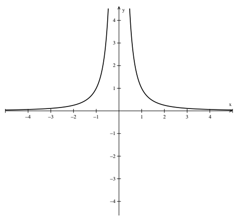
g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^*$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}^*$



h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

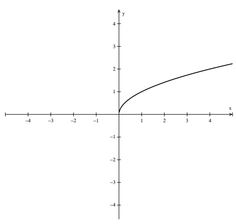
$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^*$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}^*_+$



i) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)},\ p, q$ funções polinomiais com $q(x) \neq 0$ (funções racionais)

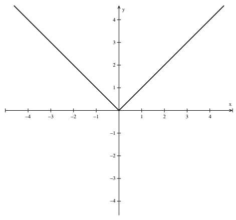
j) $f(x) = \sqrt{x}$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^*$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}_+$



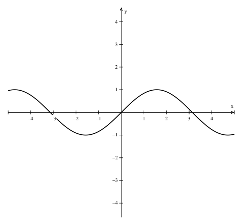
k) $f(x) = |x|$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}_+$



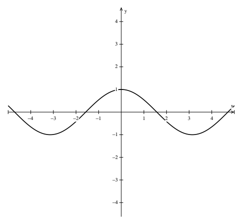
l) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$



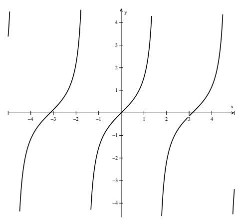
m) $f(x) = \cos(x)$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}_f = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$



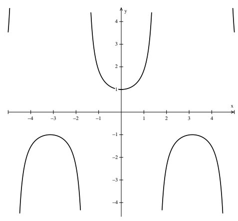
n) $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$



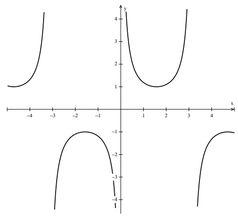
o) $f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{Im}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$



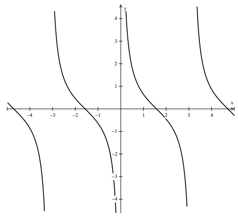
p) $f(x) = \text{cossec}\,(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\,(x)}$

$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{Im}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$



q) $f(x) = \text{cotg}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}\,(x)}$

$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$

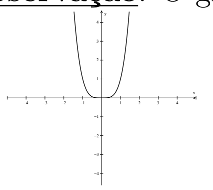


Funções pares e funções ímpares

Definição: Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é uma *função par* se, para todo x,

$$f(-x) = f(x).$$

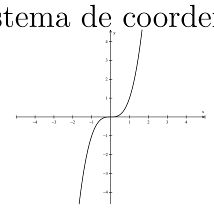
Exemplos: $f(x) = x^4$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = \cos(x)$ são pares.
Observação: O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy.



Definição: Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é uma *função ímpar* se, para todo x,

$$f(-x) = -f(x).$$

Exemplos: $f(x) = x^3$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \text{sen}\,(x)$ são ímpares.
Observação: O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação á origem O do sistema de coordenadas.



Exemplos: Dadas duas funções f e g. Mostre que:

a) se f e g são ímpares, então $f.g$ é par.

b) se f é par e g é ímpar, então $f.g$ é ímpar.

Operação com funções

Definição: Sejam f e g duas funções tais que $\mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$ seja diferente de vazio. Definimos:

a) A função $f+g$ dada por
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
denomina-se *soma* de f e g. O dominio de $f+g$ é $\mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$.

b) A função $f.g$ dada por
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
denomina-se *produto* de f e g. O dominio de $f.g$ é $\mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$.

c) A função $\dfrac{f}{g}$ dada por
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
denomina-se *quociente* de f e g. O dominio de $\dfrac{f}{g}$ é $\{x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g : g(x) \neq 0\}$.

d) A função kf, k constante, dada por

denomina-se *produto* de f *pela constante* k. O domínio de kf é D_f.

Definição: (de função composta): Sejam f e g duas funções tais que $\mathrm{Im}_f \subset \mathrm{D}_g$. A função dada por
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
denomina-se *função composta* de g e f.

Exemplos: Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = \sqrt{y}$, então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-1) = \sqrt{x^2-1}$. Como $\mathrm{D}_g = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$, então só podemos calcular a composta quando $\mathrm{Im}_f \geq 0$, ou seja $d_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$.

Definição: (de igualdade de funções) Sejam as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A' \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *igual* a g, e excrevemos $f = g$, se os domínios de f e g forem iguais, $A = A'$, e se, para todo x, $f(x) = g(x)$.

Observação: $f(x) = \operatorname{cotg}(X)$ é diferente de $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$, pois $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}$, ou seja
$$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, z \in \mathbb{Z}\}$$
e
$$\mathrm{D}_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, z \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + k\pi, z \in \mathbb{Z}\}.$$