Uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de uma função real

JONAS RENAN MOREIRA GOMES[1] e
FERNANDA S. P. CARDONA (ORIENTADORA)[2]

[1] *Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME USP), Bolsista do programa USP-Santander* jgomes@ime.usp.br; jrenan@gmail.com
[2] *Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME USP)* cardona@ime.usp.br;

1. Introdução

No estudo das funções Riemann integráveis ($R[a,b]$) surge o fato de que todas as funções contínuas num intervalo fechado são Riemann integráveis nesse mesmo intervalo ($C[a,b] \subset R[a,b]$) e é claro que nem todas as funções Riemann integráveis são contínuas. No entanto a relação entre integrabilidade e continuidade é mais sutil. O critério de Lebesgue para a existência da integral de Riemann afirma que uma função limitada é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade do seu domínio tem medida zero. Seguimos a argumentação proposta por [2] para mostrar que é possível refinar a hipótese do critério: basta que o conjunto dos pontos de um tipo específico de descontinuidade (que chamaremos no texto de descontinuidade essencial de primeira ordem) tenha medida zero para que a correspondente função limitada seja Riemann integrável.

Os conceitos topológicos básicos estarão definidos na seção 2, com esses conceitos provaremos algumas propriedades sobre *Conjuntos de Medida Zero*, na seção 3. Começaremos então um estudo mais aprofundado sobre *Descontinuidades* na seção 4, sendo capazes de identificar o conjunto dos pontos de descontinuidade essencial de primeira ordem. Dessa forma, provaremos na seção 5 um refinamento do critério de Lebesgue. No texto utilizaremos o fato de que todo intervalo fechado é um conjunto fechado, sem enunciar explicitamente essa passagem.

2. Pre-Liminares

Assumiremos que os conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ estão construídos como em [3]. Todas as provas que não são dadas (nesse caso utilizaremos o rodapé) podem ser encontradas em [4]. Introduziremos a notação que iremos utilizar pelo resto do artigo e após damos algumas definições.

2.1 Notação

Optamos por manter a notação padrão quando ela existe, vamos mostrar aqui algumas exceções:

- $\mathbb{R}^+$ irá denotar o conjunto dos reais estritamente positivos.
- Um intervalo será representado por I. Seu diâmetro, por $D(I)$.
- O conjunto de todas as partições do intervalo fechado $[a,b]$ será representado por $P[a,b]$.
- A soma superior (respectivamente: soma inferior) de uma função f com respeito a uma partição P de seu domínio será denotada por $S(P,f)$ (respectivamente: $I(P,f)$).

2.2 Definições

Algumas definições que serão utilizadas ao longo do texto:

- Um conjunto E será dito *enumerável* se existir uma bijeção entre E e $\mathbb{N}$.
- Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será *aberto* se $\forall x \in A, \exists \epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $[x-\epsilon, x+\epsilon] \subset A$ (todo ponto de A é um *ponto interior*).
- Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será *fechado* se seu complementar em $\mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{R} \setminus A$) for aberto.
- Uma função, $f : I \to \mathbb{R}$ será *contínua* em $x_0 \in I$ se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$.
- Uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ (I necessariamente é um intervalo fechado) será *Riemann Integrável* se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists P \in P[a,b]$ tal que $S(P,f) - I(P,f) < \epsilon$.

Teorema 1. *Se A e B contidos em $\mathbb{R}$ são abertos, então a sua união ($A \cup B$) também o é.*

Demonstração. Basta notar que, $x \in A \cup B$ implica que $x \in A$ ou $x \in B$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $x \in A$. Assim, $\exists \epsilon \in \mathbb{R}, [x-\epsilon, x+\epsilon] \subset A \Rightarrow [x-\epsilon, x+\epsilon] \subset A \cup B$. Assim $A \cup B$ é aberto. □

Corolário 1. *Se A e B contidos em $\mathbb{R}$ são fechados, então a sua intersecção ($A \cap B$) também o é.*

Demonstração. $\mathbb{R}\setminus(A\cap B) = (\mathbb{R}\setminus A)\cup(\mathbb{R}\setminus B)$, pelas leis de De Morgan. Assim, pelo teorema anterior, $\mathbb{R}\setminus(A\cap B)$ é aberto (porque é a união de dois abertos) e, por definição, $A\cap B$ é fechado. □

Teorema 2. *Para todo $A\subset\mathbb{R}$ é equivalente:*

1. *A é fechado e limitado.*

2. *Toda cobertura de A por intervalos abertos admite uma subcobertura finita.*

Preferimos omitir a demonstração desse teorema para não recorrer ao conceito de compacidade (ou de pontos de acumulação). Uma demonstração pode ser encontrada em [1].

3. Conjuntos de medida zero

Dizemos que um subconjunto Z de $\mathbb{R}$ tem *medida zero* (ou medida de Lebesgue zero) se, $\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+$ existe uma seqüência $\{I_n\}$ de intervalos abertos tais que:

- $Z\subset\bigcup_n I_n$.
- $\sum_n D(I_n)<\epsilon$.

Teorema 3. *Todo conjunto unitário tem medida zero.*

Demonstração. Se $F=\{x_0\}$, então $\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+, F\subset]x_0-\frac{\epsilon}{4}, x_0+\frac{\epsilon}{4}[$ e é claro que podemos formar uma seqüência de intervalos cuja soma de seus diâmetros seja menor que ϵ. □

Teorema 4. *Se Z tem medida zero e $Y\subset Z$, então Y também tem medida zero.*

Demonstração. Dado ϵ, seja $\{I_n\}$ a seqüência de intervalos que satisfazem os dois critérios para Z. Logo, $Y\subset Z\Rightarrow Y\subset\bigcup_n I_n$. E assim, Y tem medida zero. □

Teorema 5. *A união enumerável de conjuntos de medida zero é um conjunto de medida zero.*

Demonstração. Se $E=\bigcup_n Z_n$, então, dado $\epsilon>0$, para cada n podemos escolher para cada Z_n uma seqüência $(\{I^n_m\})$de intervalos de diâmetro menor que $\frac{\epsilon}{2^n}$ e formar, a partir dessas seqüências $\{I_s\}$ [1].

Como $\sum_s D(I_s) < \sum^\infty \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$, então as duas condições estão satisfeitas. □

Corolário 2. *Todo conjunto enumerável tem medida zero.*

[1]Aqui estamos assumindo que $N\times N$ é enumerável.

Demonstração. Se M é enumerável então $M=\bigcup_n\{x_n\}$. Mas, pelo teorema 3, cada $\{x_n\}$ tem medida zero. Pelo teorema 5, M tem medida zero. □

Corolário 3. *Se $X\subset[a,b]$ é um conjunto fechado e de medida zero, então $\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+$, $\exists P\in P[a,b]$ tal que a soma do comprimento dos intervalos de P da forma $[x_j,x_{j+1}]\cap X\neq\varnothing$ é menor que ϵ.*

Demonstração. Dado $\epsilon\in\mathbb{R}^+$, sejam $\{I_n\}$ os intervalos abertos que satisfazem as duas condições de medida zero para X. Como X é limitado e fechado, então existe uma subcobertura finita de $\{I_n\}$ que ainda cobre X, e $\sum_{i=1}^m D(I_n)<\epsilon$. Podemos formar as seqüências $\{a_j\}$ e $\{a_m\}$ de números reais tais que $I_i=[a_j,a_m]$ (os extremos inferiores e superiores dos intervalos) e então criar a seqüência de pontos$\{P_n\}$, dispondo em ordem crescente $\{a_j\}$ e $\{a_m\}$. Tome $P=\bigcup^m\{P_n\}\cup\{a,b\}$. O conjunto P de fato é uma partição de [a,b] e, como $\sum_{i=1}^m D(P_i)<\sum_{i=1}^m D(I_i)$, então a soma dos comprimentos dos intervalos que contém algum ponto de x é menor que ϵ. □

4. Descontinuidades

Nessa seção iremos descrever vários tipos de descontinuidades possíveis para uma função. Como esse conceito será central, vamos explicitar a negação da definição de continuidade de uma função em um ponto x_0 pertencente ao seu domínio:

$$f \text{ é descontínua em } x_0 \text{ pertencente ao seu domínio} \\ \Leftrightarrow \\ \exists\epsilon\in\mathbb{R}^+,\forall\delta\in\mathbb{R}^+,(\exists x_0\in \text{ Dom (f) tal que } |x-x_0|<\delta \text{ e } |f(x)-f(x_0)|>\epsilon)$$

4.1 Tipos de descontinuidades

No que se segue, vamos supor sempre que x_0 pertence ao domínio da função em questão.

Diremos que f tem uma *descontinuidade removível*[2] em x_0 se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

mas

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)\ .$$

[2]Chamamos de descontinuidade removível porque, se alterarmos a definição de f de forma que $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, então f seria contínua em x_0.

Diremos que f tem uma *descontinuidade de salto* em x_0 se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)\ .$$

Diremos que f tem uma *descontinuidade essencial de primeira ordem* em x_0 se

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ não existem.

Diremos que f tem uma *descontinuidade essencial de segunda ordem* em x_0 se

Ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ não existe.

Representaremos o conjunto das descontinuidades removíveis, de salto, essenciais de primeira ordem e essenciais de segunda ordem, de uma função f, respectivamente por R_f, S_f, E_{1f}, E_{2f}. Obtemos então outra definição para descontinuidade de uma função em um ponto de seu domínio:

$$f \text{ é descontínua em } x_0 \text{ pertencente ao seu domínio} \\ \Leftrightarrow \\ x_0 \in R_f \cup S_f \cup E_{1f} \cup E_{2f}\ .$$

Exemplos

- Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, então $0 \in R_f$.
- Se [3]$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$, então $\mathbb{Z} = S_f$.
- Se $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ então $[0,1] = E_{1f}$.
- Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$, então $0 \in E_{2f}$.

4.2 Outra caracterização da descontinuidade

Estaremos interessados agora em encontrar outra caracterização para a descontinuidade, que será importante para decidir se o conjunto de descontinuidade de uma função é enumerável ou não.

[3] $[x]$ representa o menor inteiro mais próximo de x .

Oscilação de uma função

A oscilação de uma função f em um subconjunto (I) de seu domínio será definida por

$$\omega_f(I) = \sup\ \{|f(s) - f(t)|, \{s,t\} \subset I\}\ .$$

De forma análoga, definiremos a oscilação de f em um ponto x_0 de seu domínio como:

$$\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]), \delta \in \mathbb{R}^+\}\ .$$

Teorema 6. *Seja x_0 um ponto do domínio de f. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, $\omega_f(x_0) = 0$.*

Demonstração. Se f é contínua em x_0, $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, se $\{s,t\} \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, então $|f(s) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$, mas $|f(s) - f(t)| = |f(s) - f(x_0) - (f(t) - f(x_0))| \leq |f(s) - f(x_0)| + |f(t) - f(x_0)| = \epsilon$. Então $\omega_f(x_0) = \inf\{\epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}^+\} \Rightarrow \omega_f(x_0) = 0$

Suponha agora que $\omega_f(x_0) = 0$, mas então $\inf\{\omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]), \delta \in \mathbb{R}^+\} = 0$, isto é[4], $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < \omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) < \epsilon$, ou ainda: $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\{s,t\} \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ então $\sup\ \{|f(s) - f(t)|\} = \epsilon$, logo, $|f(s) - f(t)| < \epsilon$. Como $\forall\delta \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, f é contínua em x_0. □

Teorema 7. *Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ então, fixada uma função f (com domínio D), o conjunto $\{x \in D | \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto em $\mathbb{R}$*

Demonstração. Fixado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se $p \in \{x \in D | \omega_f(x) < \alpha\}$, então, $\exists\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\omega_f([p - \delta, p + \delta]) < \alpha$. Se $x \in [p - \delta, p + \delta]$, então $w_f(x) < \alpha$. Como x é arbitrário, $[p - \delta, p + \delta] \subset \{x \in D | \omega_f(x) < \alpha\}$. Assim p é um ponto interior. Como p é arbitrário, $\{x \in D | \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto. □

Corolário 4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, fixado $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$ então $S = \{x \in [a,b] | \omega_f(x) \geq \alpha\}$ é fechado e limitado.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, $\{x \in [a,b] | \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto em $\mathbb{R}$, assim, seu complementar em relação a $\mathbb{R}(\{x \in \mathbb{R} | \omega_f(x) \geq \alpha\})$ é fechado, por definição. Então $\{x \in [a,b] | \omega_f(x) \geq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} | \omega_f(x) \geq \alpha\} \cap [a,b]$ é a intersecção de dois conjuntos fechados e, pelo corolário 1, é fechado. Como $\{x \in D | \omega_f(x) \geq \alpha\} \subset [a,b]$, então $\{x \in [a,b] | \omega_f(x) \geq \alpha\}$ também é limitado. □

[4] Usamos aqui a definição de ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$: $b = \inf A$ se b é cota inferior de A e $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists a \in A$ tal que $b < a < b + \epsilon$.

Teorema 8. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. O conjunto $S = R_f \cup S_f \cup E_{2f}$ é enumerável.*

Demonstração. Seja $A_1 = \{x_0 \in E_{2f} | \text{existe } \lim_{x\to x_0^-} f(x)\}$ e $A_2 = \{x_0 \in E_{2f} | \text{existe } \lim_{x\to x_0^+} f(x)\}$. É claro que $S = (R_f \cup S_f \cup A_1) \cup (R_f \cup S_f \cup A_1)$. Denotaremos $(R_f \cup S_f \cup A_1)$ por S_1 e $(R_f \cup S_f \cup A_2)$ por S_2. Sabemos (pela caracterização 4.1 da descontinuidade) que $x_0 \in S \Rightarrow f$ é descontínua em x_0.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $O_n = \{x_0 \in S_1 | \omega_f(x_0) > \frac{1}{n}\}$. Como $x_0 \in S_1$, pelo teorema 6, $\omega_f(x_0) > 0$ e assim, $\exists n \in \mathbb{N} | \omega_f(x_0) > \frac{1}{n}$. Logo, $x_0 \in O_n$, para algum n, isto é, $S_1 \subset \bigcup_n O_n$. Assim, se cada O_n for enumerável, S_1 também será [5]. Provaremos que cada O_n é enumerável.

Se $x_0 \in O_n$, então existe $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Fixado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $(x \in]x_0-\delta, x_0[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$. Mas, se $x_1 \in]x_0-\delta, x_0[$, então, $\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+$tal que $(|x - x_1| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon)$ (basta tomar δ_2 tal que $]x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2[\subset]x_0 - \delta, x_0[$). Como ϵ foi arbitrário, para $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$, f é contínua em x, logo $x \notin S_1$, ou ainda, $\forall x_0 \in O_n$, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $]x_0 - \delta, x_0[\cap O_n = \varnothing$.

Fixado n, tome $x_0 \in O_n$. Seja $q_n(x_0)$ um número racional em $]x_0 - \delta(x_0), x_0[$ ($\delta(x_0)$ para o qual $]x_0 - \delta, x_0[\cap O_n = \varnothing$). Defina $F : O_n \to \mathbb{Q}$ por $x_0 \mapsto q_n(x_0)$. Se $\{x_0, y_0\} \subset O_n$ e $x_0 \neq y_0$, então (considerando $x_0 < y_0$), $]x_0 - \delta(x_0), x_0[\cap]y_0 - \delta(y_0), y_0[= \varnothing$, caso contrário $x_0 \in]y_0 - \delta(y_0), y_0[$, o que é um absurdo. Assim $q_n(x_0) \neq q_n(y_0)$ e F é injetora. Restringindo o contradomínio, criamos $F_2 : O_n \to A (\subset \mathbb{Q})$ bijetora. Assim [6], cada O_n é enumerável e S_1 é enumerável.

Poderíamos fazer exatamente a mesma construção para S_2 e chegarmos a conclusão de que S_2 é enumerável. Assim, $S = S_1 \cup S_2$ é enumerável.

□

5. Refinamento do critério de Lebesgue para a Riemann-Integrabilidade

Antes de apresentarmos um refinamento do critério de Lebesgue, vamos apresentar o próprio critério:

[5] Novamente, esse fato equivale à enumerabilidade de $N \times N$
.

[6] Aqui usamos dois fatos: $\mathbb{Q}$ é enumerável e todo subconjunto de um conjunto enumerável é, no máximo, enumerável.

5.1 Critério de Lebesgue

Teorema 9. *Uma função f limitada é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero.*

Demonstração. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável, então:

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists P \in P[a,b]$ tal que $S(P,f) - I(P,f) < \epsilon$.

Se $P = \{x_1, ..., x_m\}$, então

$$\sum_{i=1}^{n} (f(\eta_i)\Delta(x_i)) - \sum_{i=1}^{n-1} (f(\xi_i)\Delta(x_i)) < \epsilon$$

(onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $f(\eta_i) = \sup\{f(x) | x \in \Delta x_i\}$ e $f(\xi_i) = \inf\{f(x) | x \in \Delta x_i\}$). Ou ainda,

$$\sum_{i=1}^{n} (f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta x_i < \epsilon \ .$$

Mas, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se $\{s_i, t_i\} \subset \Delta x_i$, temos $|f(s_i) - f(t_i)| < f(\eta_i) - f(\xi_i)$. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta x_i < \epsilon \ .$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = \{x \in [a,b] | \ \omega_f(x) > \frac{1}{n}\}$. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, vamos escolher $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2n}$ e, a partir desse ϵ_0, extrair uma partição P de f tal que

$$\{s_i, t_i\} \subset \Delta x_i \text{ para cada } i \leq n, \sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta x_i < \epsilon_0.$$

Então, $x \in S_n \Rightarrow \frac{1}{n} < \omega_f(x)$. Se $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $y_i \in \Delta x_i$ então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \omega_f(y_i)\Delta x_i < \epsilon_0, \text{ o que implica}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para $x \in S_n$ que estão contidos em algum Δx_i, podemos tomar $\{]x_i, x_{i+1}[\}$ como uma seqüência de intervalos abertos que contém esses pontos e cujo diâmetro é menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Se não existe i tal que $x \in \Delta x_i$, então $x \in P$. Mas, desde que P é enumerável, P tem medida zero e podemos encontrar uma seqüência de intervalos abertos com diâmetro total menor que $\frac{\epsilon}{2}$ que cobre P. Assim, S_n tem medida zero e, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero (tal conjunto é $\bigcup_n S_n$, pelo teorema 6).

Suponha agora que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tenha medida zero. Fixe $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, então o conjunto $S = \{x \in [a,b] | \omega_f(x) \geq \epsilon\}$ (onde $\epsilon = \min\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_1}{2(b-a)}\}$) está contido no conjunto dos pontos de descontinuidade de f, e, pelo teorema 4, tem medida zero. Pelo corolário 4, S é fechado. Sendo fechado e de medida zero, o corolário 3 garante que existe uma partição de [a,b] cujos intervalos que contém elementos de S são arbitrariamente pequenos.

Tomemos então uma partição P de [a,b] tal que os intervalos que contém algum elemento de S tem diâmetro menor que $\frac{\epsilon}{4||f||}$ (onde $||f|| = \max\{\sup\{f(x), x \in [a,b]\}, -\inf\{f(x), x \in [a,b]\}\}$).

Logo

$$S(P,f) - I(P,f) =$$

$$S(P',f) - I(P',f) + S(P'',f) - I(P'',f) \ .$$

Onde P' são os intervalos que não contém nenhum ponto de S e P'' os que contém. Então:

$$S(P'',f) - I(P'',f) = \sum_{i=1}^{n} (f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta(x_i)$$

$$< 2||f|| \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i) < \epsilon \leq \frac{\epsilon_1}{2} \ .$$

Para os pontos de P':

$$S(C',f) - I(C',f) < \sum_{i=1}^{n} (f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta(x_i)$$

$$< \epsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i) < \epsilon(b-a) \leq \frac{\epsilon_1}{2} \ .$$

Logo,

$$S(P,f) - I(P,f) < \epsilon_1$$

e f é integrável em [a,b]. □

5.2 Refinamento do critério de Lebesgue

Teorema 10. *Uma função f definida em um intervalo fechado será Riemann integrável se, e somente se, E_{1f} tiver medida zero.*

Demonstração. Devido ao critério de Lebesgue, f é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tiver medida zero. Porém, pelo teorema 8, sabemos que o conjunto $R_f \cup J_f \cup E_{2f}$ tem medida zero. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f terá medida zero se, e somente se, E_{1f} tiver medida zero. □

Referências

[1] Elon L. Lima, *Análise Real*, Vol. 1, Publicações IMPA.

[2] J. Klippert, *Advanced Advanced Calculus: Counting the Discontinuities of a Real-Valued Function with Interval Domain*, Mathematics Magazine **62**, 43-48.

[3] E. Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea Pub Co.

[4] A.J. White, *Real analysis : an introduction*, Addison-Wesley.