

MAT0501 E MAT5734 - ANEIS E MÓDULOS

Prof: Juan Carlos Gutiérrez Fernández

Lista 2 (2018)

A seguir, A denotará um anel com 1.

1. Seja M um A -módulo e X um subconjunto de M . Definimos o *anulador* de X por

$$\text{ann}(X) = \{a \in A : ax = 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

Mostre que $\text{ann}(X)$ é um ideal à esquerda de A e quando X é um submódulo de M , então é um ideal (bilateral) de A .

2. Determine todos os submódulos de \mathbb{Z}_{15} (como \mathbb{Z} -módulo). Determine o anulador de cada elemento de \mathbb{Z}_{15} e o anulador de \mathbb{Z}_{15} .
3. Seja $M \neq 0$ um \mathbb{Z} -módulo finito tal que o conjunto dos seus submódulos é totalmente ordenado por inclusão. Prove que existe um primo p , tal que a ordem de M é uma potência de p .
4. Seja D um domínio de integridade e $x \in D$ com $x \neq 0$. Mostre que $D \cong Dx$ como D -módulos.
5. Mostre que \mathbb{Q} não é um \mathbb{Z} -módulo finitamente gerado.
6. Mostre que \mathbb{Q} não é um \mathbb{Z} -módulo livre.
7. Se M, N são A -módulos, então o conjunto $\text{Hom}_R(M, N)$ de todos os homomorfismos de A -módulos de M em N é um grupo abeliano respeito da operação “soma de homomorfismos”. Prove que $\text{Hom}_A(M, M)$ é um anel, onde o produto é a composição de aplicações. Prove que M é um $\text{Hom}_A(M, M)$ -módulo à esquerda em relação à ação óbvia de $\text{Hom}_A(M, M)$ em M ,

$$f \cdot x = f(x), \text{ para todo } f \in \text{Hom}_A(M, M), \text{ e } x \in M.$$

8. Determinar $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$ e $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$, com $n > 0$ como \mathbb{Z} -módulos.
9. Prove que para todo A -módulo M , temos $\text{Hom}_A(A, M) \cong (M, +, 0)$.
10. Seja M um A -módulo. Seja $x \rightarrow ax$ o endomorfismo do grupo M definido por um elemento fixo a de A . Este endomorfismo pertence a $\text{End}_A(M)$?
11. Um A -módulo M é *simples* (ou *irredutível*) se $M \neq 0$ e os únicos submódulos de M são 0 e M . Seja $f: M \rightarrow N$ um homomorfismo não nulo de A -módulos. Mostre que se M é simples então f é injetora e se N é simples, então f é sobrejetora.
12. Prove o Lema de Schur: Se M e N são módulos simples, então qualquer homomorfismo de M em N não nulo é um isomorfismo. Em particular, o anel de endomorfismos de um módulo simples é um anel com divisão.

13. A recíproca do lema é verdadeira? Isto é, se $\text{End}_A(M)$ é um anel de divisão, então necessariamente M é simples?
14. Provar que um A -módulo M é simples se e somente se $M \cong A/I$ onde I é um ideal à esquerda maximal de A .
15. Sejam M, M_1, \dots, M_n uma família de A -módulos. Provar que $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ se e somente se para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe um homomorfismo de A -módulos $\varphi_i: M \rightarrow M_i$ tal que $\text{Im}(\varphi_i) \cong M_i$, $\varphi_i \varphi_j = 0$ para $i \neq j$ e $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = I_M$.
16. Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de A -módulos. Provar que se M' e M'' são finitamente gerados, então N é finitamente gerado.
17. Considerar o seguinte diagrama comutativo de A -módulos:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

Provar que g envia $\text{Ker } f$ em $\text{Ker } f'$ e que h envia $\text{Im } f$ em $\text{Im } f'$. Consequentemente, g e h determinam homomorfismos,

$$\begin{aligned} g_1: \text{Ker } f &\rightarrow \text{Ker } f', & g_2: \text{Coim } f &\rightarrow \text{Coim } f' \\ h_1: \text{Im } f &\rightarrow \text{Im } f', & h_2: \text{Coker } f &\rightarrow \text{Coker } f'. \end{aligned}$$

18. Se considera o seguinte diagrama comutativo de A -módulos com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & T \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & T' \end{array}$$

Provar que f e g induzem homomorfismos $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ e $\text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma$ respectivamente. Provar que f' e g' induzem homomorfismos $\text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta$ e $\text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma$. Além do mais, se f' monomorfismo, então sequência $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma$ é exata e se g' é epimorfismo, então é exata a sequência $\text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma$.

19. Provar que se L é um A -módulo livre, para qualquer diagrama de A -módulos com linha exata da forma

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ & \downarrow h & \\ M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

existe um homomorfismo $\varphi: L \rightarrow M$, tal que $g\varphi = h$.

20. Provar que para todo A -módulo livre L e toda sequência exata de A -módulos

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \rightarrow 0,$$

a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(L, M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(L, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(L, T) \longrightarrow 0$$

é exata, onde f^* e g^* são definidas por $f^*(\varphi) = f \circ \varphi$ e $g^*(\varphi) = g \circ \varphi$.

21. Seja A um anel comutativo com 1. Provar que se f é um endomorfismo suprajetivo de A^n , então f é bijetiva. Podemos também concluir que f é necessariamente bijetiva se assumir que f é um endomorfismo de A^n injetor?