MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Solução exercícios

1. 9.3 Ex5

   Considere a função $f(x) = x^m (1-x)^n$, onde m e n são inteiros positivos, e mostre que:

   $a)$ se m é par, f tem um mínimo local em $x = 0$;

   $b)$ se n é par, f tem um mínimo local em $x = 1$;

   $c)$ f tem um máximo local em $x = \dfrac{m}{m+n}$, independente de m e n serem pares ou não.

   Solução: Derivando a função

   $$f(x) = x^m (1-x)^n$$

   temos,

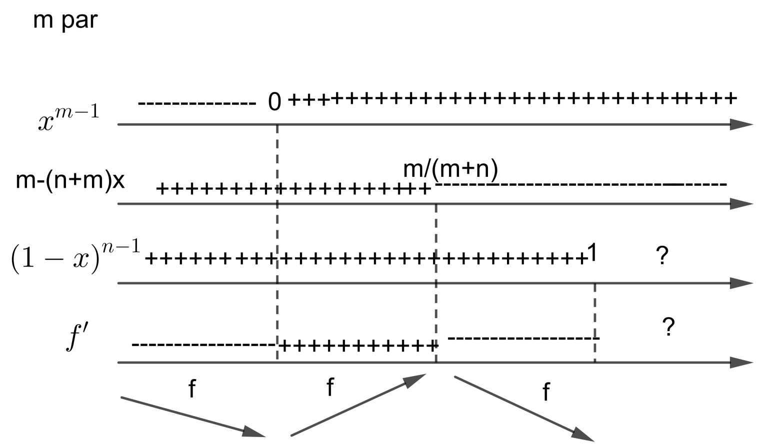
   $$f'(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} (m - (n+m)x)$$

   Os pontos críticos são:

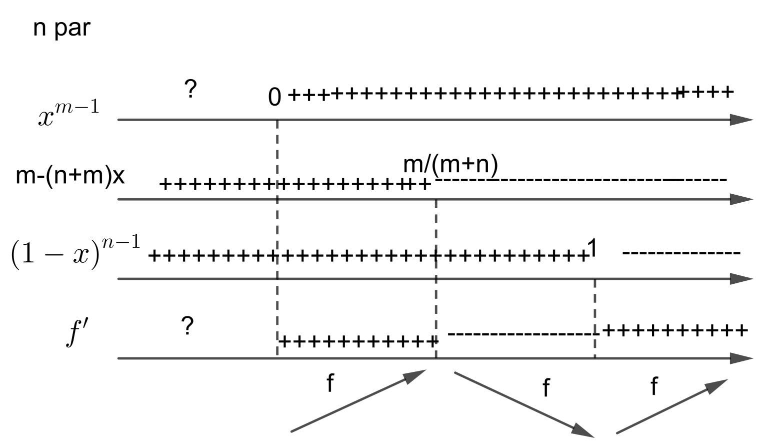
   $$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = \frac{m}{n+m}$$

   Vamos analisar o comportamento da derivada na vizinhança destes pontos.

Se m é par então pela tabela abaixo temos que $x = 0$ é um ponto de mínimo local e $x = \dfrac{m}{n+m}$ é um ponto de máximo local.



Se n é par então pela tabela abaixo temos que $x = 1$ é um ponto de mínimo local e $x = \dfrac{m}{n+m}$ é um ponto de máximo local.



É claro que se m e n são pares então 0 e 1 são mínimos locais e se são ímpares são pontos de inflexão.

2. 9.7 Ex5

   (a) Use o TVM para mostrar que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

   onde n é natural.

   (b) Mostre que a sequência

$$s_n = (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) - \ln(n)$$

   é decrescente e limitada inferiormente.

   Pelo axioma da completude existe

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} ((1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) - \ln(n))$$

   γ é o número de Euler- Mascheroni. Não se sabe se ele é racional ou irracional.

Solução:

Pelo TVM existe c entre n e $n+1$ tal que

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln'(c) = 1/c$$

Mas

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$$

Portanto

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

Para a segunda parte observe que

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) < 0$$

ou seja s_n é decrescente.

Somando-se a desigualdade acima de 1 até n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Subtraindo $\ln(n)$ temos

$$0 < \ln(n+1) - \ln(n) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) - \ln(n))$$

Portanto a sequência é positiva.

3. 9.1 Ex20

   A função $y = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$ não encontra a exponencial $y = e^x$ para $n = 1, 2$. Para $n \geq 3$ encontra em dois pontos. Determine α para que $y = x^\alpha$ tangencie $y = e^x$.

   Solução: Seja (x_0, y_0) o ponto de tangência. Então

$$x_0^\alpha = e^{x_0} \qquad\qquad \alpha x_0^{\alpha-1} = e^{x_0}$$

   Comparando

$$\alpha x_0^{\alpha-1} = x_0^\alpha \qquad\qquad \alpha = x_0$$

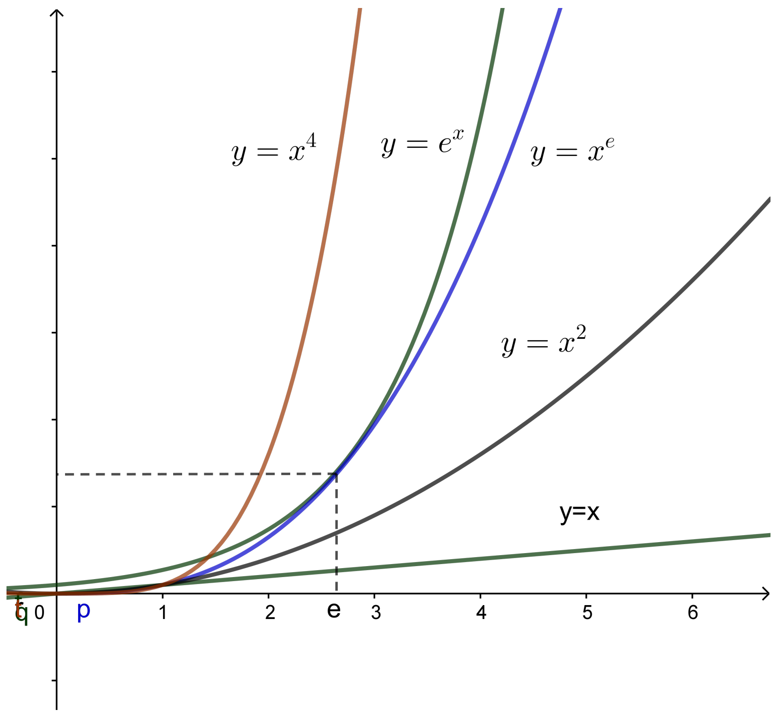
$$e^{x_0} = x_0^{x_0}$$

   Tirando o logaritmo:

$$x_0 = x_0 \ln x_0 \qquad\qquad \ln x_0 = 1$$

$$x_0 = e = \alpha$$

Assim o polinômio tangente a exponencial $y = e^x$ é $y = x^e$!



4. 9.3 Ex4

   Mostre que qualquer polinômio de grau ímpar $n \geq 3$ tem pelo menos um ponto de inflexão.

   Solução:

   Seja $p(x)$ um polinômio de grau impar. Então $p''(x)$ também é um polinômio de grau impar.

   Todo polinômio de grau impar tem uma raiz real c_1. Se k_1 é a multiplicidade de c_1 então

   $$p''(x) = (x - c_1)^{k_1} p_1(x)$$

   onde $p_1(c_1) \neq 0$.

   Se k_1 é impar então $p_1(x)$ é de grau par e portanto $p''(x)$ muda de sinal numa vizinhaça de c_1 e consequentemente c_1 é um ponto de inflexão.

Se k_1 é par então $p_1(x)$ é impar e tem outra raiz c_2. Assim

$$p''(x) = (x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2}p_2(x)$$

Se k_2 é impar o mesmo raciocínio mostra que c_2 é ponto de inflexão. Repetindo este raciocínio vamos encontrar uma raiz de multiplicidade impar ou seja um ponto de inflexão.