MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

BMAC - IME-USP

Lista 4

04/06/2020

Parte 1 - Cálculo com Derivadas

1. Se $xy^3 + xy = 6$ calcule $\dfrac{dy}{dx}(3)$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}(3)$.

2. Seja $y = e^{\alpha x}$, onde α é uma raíz da equação $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (com a e b constantes). Mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by = 0$.

3. Seja $g : I\!R \to I\!R$ uma função derivável até a segunda ordem. Considere $f(x) = e^x g(3x+1)$. Calcule $f^{''}(0)$, sabendo-se que $g(1) = g^{'}(1) = g^{''}(1)$.

4. Determine um polinômio $p(x)$ de grau 2 tal que $p(2) = 5$, $p^{'}(2) = 3$ e $p^{''}(2) = 2$.

5. Considere o polinômio centrado em c dado por

$$p(x) = a_n(x-c)^n + a_{n-1}(x-c)^{n-1} \ldots + a_1(x-c)^1 + a_0$$

   Mostre que $a_k = \dfrac{p^{(k)}(c)}{k!}$.

6. Se $p(x) = x^3 + x^2 + 1$ determine os coeficientes a_k tais que $p(x) = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$.

7. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 3)$ e que é tangente à circunferência com centro na origem e raio igual a 1.

8. Calcule a segunda derivada da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

9. Considere a parte da curva $y = \dfrac{1}{x}$ que fica no primeiro quadrante e desenhe a tangente num ponto arbitrário (x_0, y_0) dessa curva.

   $a)$ Mostre que a porção da reta tangente compreendida entre os eixos tem como ponto médio o ponto de tangência.

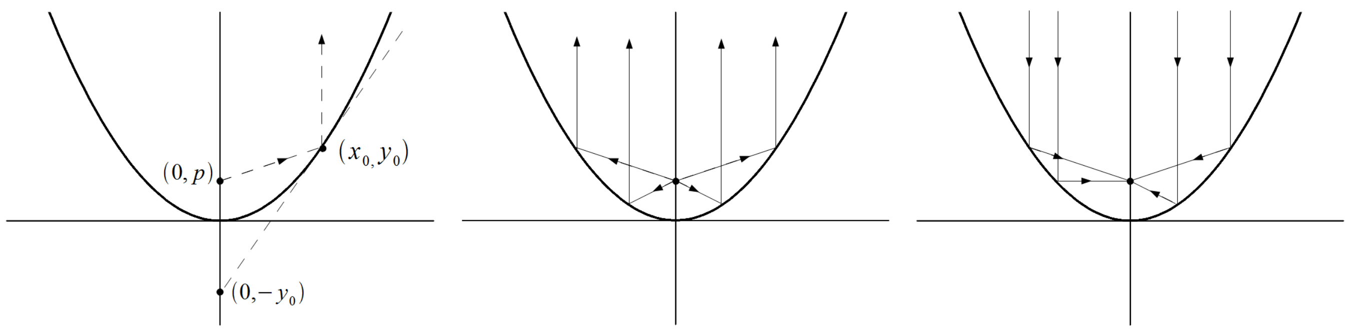
   $b)$ Ache a área do triângulo formado pelos eixos e pela tangente e verifique que essa área é independente da localização do ponto de tangência.

10. Seja p uma constante positiva e considere a parábola $y = x^2/4p$ com vértice na origem e o foco no ponto $(0, p)$, como é mostrado na figura abaixo (à esquerda). Seja (x_0, y_0) um ponto dessa parábola, diferente do vértice.

    a) Mostre que a tangente em (x_0, y_0) tem coeficiente linear $-y_0$.

    b) Mostre que o triângulo com vértices (x_0, y_0), $(0, -y_0)$ e $(0, p)$ é isósceles.

    c) Suponha que uma fonte de luz seja colocada no foco e que cada raio de luz deixando o foco seja refletido pela parábola de tal modo que ele forme ângulos iguais com a reta tangente no ponto de reflexão (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). Use *b*) para mostrar que, após a reflexão, cada raio aponta verticalmente para cima, paralelo ao eixo y (figura abaixo, no meio) [1].



11. Use a propriedade da reflexão das parábolas para mostrar que as duas tangentes a uma parábola nas extremidades de uma corda que passa pelo foco são perpendiculares entre si.

Parte 1 - Máximos e Mínimos

1. *a*) Mostre que $y = x^2 + a/x$ tem um mínimo, mas não um máximo para qualquer valor da constante a.

    b) Determine o ponto de inflexão de $y = x^2 - 8/x$.

2. Encontre a e b tais que $y = a\sqrt{x} + \dfrac{b}{\sqrt{x}}$ tenha $(1, 4)$ como um ponto de inflexão.

3. Mostre que a curva cúbica genérica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem um único ponto de inflexão e três formas possíveis, conforme seja $b^2 > 3ac$, $b^2 = 3ac$ ou $b^2 < 3ac$. Esboçe essas formas.

4. Mostre que qualquer polinômio de grau ímpar $n \geq 3$ tem pelo menos um ponto de inflexão.

[1] Essa é a chamada *propriedade de reflexão das parábolas*. Para formar uma ideia tridimensional da maneira como essa propriedade é usada no design de holofotes e faróis de automóvel, temos apenas de imaginar um espelho construído, girando-se uma parábola ao redor de seu eixo e prateando o lado interno da superfície resultante. Tal refletor parabólico pode ser também usado ao contrário (figura acima, à direita) para juntar os raios fracos, que chegam paralelos ao eixo, e concentrá-los no foco. Este é princípio básico das antenas de radar, radiotelescópios e telescópios ópticos refletores.

5. Considere a função $f(x) = x^m (1-x)^n$, onde m e n são inteiros positivos, e mostre que:

   $a)$ se m é par, f tem um mínimo local em $x = 0$;

   $b)$ se n é par, f tem um mínimo local em $x = 1$;

   $c)$ f tem um máximo local em $x = \dfrac{m}{m+n}$, independente de m e n serem pares ou não.

6. Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

Parte 1 - Variação de Funções

1. Esboce os gráficos das seguintes funções, indicando os intervalos em que cada função é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize os pontos de inflexão e todos os valores máximos ou mínimos que existirem assim como as assíntotas.

   $a) f(x) = x^4 - x^2$ $\quad$ $b) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ $\quad$ $c) f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

   $d) f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$ $\quad$ $e) f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $f) f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

   $g) f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+9}$ $\quad$ $h) f(x) = (x+1)^{1/3}$ $\quad$ $i) f(x) = x\sqrt{3-x}$

   $$j) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1 - (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

2. Esboce o gráfico de uma função $f(x)$ definida para $x > 0$ e tendo as propriedades: $f(1) = 0$ e $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (para todo $x > 0$).

Parte 1 - Funções Inversas

1. Para as funções abaixo, decida em que intervalos elas são inversíveis e esboce, em cada caso, o gráfico de f e de sua inversa em um mesmo par de eixos.

   $a) f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ $\quad$ $b) f(x) = x^2 - 5x + 6$

   $c) f(x) = x\,|x|$ $\quad$ $d) f(x) = \dfrac{|5x-1|}{2-x}$

2. Mostre que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde $ad - bc \neq 0$ é inversível e encontre sua inversa.

   O que acontece se $ad - bc = 0$? e se $c = 0$?

3. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função inversível com a propriedade

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

.

$a)$ Mostre que $f(1) = 0$ e que $f(1/a) = -a$
$b)$ Se $f(2) = 1$ calcule $f(8)$, $f(\sqrt{2})$ e $f^{-1}(4)$.

4. Mostre que se f e g são inversíveis, então $f \circ g$ é inversível e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Parte 1 - Aplicações

1. Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de $R\$640,00$ por metro, enquanto, em terra, custa $R\$312,00$. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

2. Um certo cartaz deverá ter 600cm^2 para a mensagem impressa; deve ter $7,5$cm de margem no topo e na base e uma margem de 5cm em cada lado. Determine as dimensões totais do cartaz para que a quantidade de papel usada seja mínima.

3. Um arame deve ser cortado em duas partes, uma delas será dobrada em forma de quadrado e a outra em forma circular. Determine como cortar o arame de forma que a soma das áreas delimitadas seja mínima.

4. Mostre que o quadrado tem a maior área dentre todos os retângulos inscritos numa dada circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Um homem num barco que dista 9km da praia deve chegar a um ponto que dista 15km do local da praia mais próximo ao seu barco. Sabendo que sua velocidade na água é 4km/h e na terra é 5km/h, determine o caminho a ser feito por ele para que gaste menor tempo.

6. Retirando-se quadrados iguais dos cantos de uma folha quadrada de metal e unindo as bordas podemos fazer uma caixa. Se a folha de metal tem $1,20$ metros de lado, encontre as dimensões da caixa de modo a obter o maior volume possível.

7. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4, se os lados do retângulo estiverem apoiados sobre os catetos.