MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

BMAC-IME/USP

Lista de exercícios 3

13/04/2020

Limites e Continuidade

1. Calcule os limites:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

$b)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$d)\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

$e)\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

$f)\ \lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

$g)\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-2x}{x^2-1}$

$h)\ \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$

$i)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

$j)\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$k)\ \lim\limits_{x\to h} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{h}}{x-h}$

$l)\ \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

$m)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

$n)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{x-1}$

2. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e $|g(x)|\leq M$, para todo $x\in Dom(g)$, mostre que $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=0$.

3. Se $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ mostre que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

4. Seja f é uma função. Se $f(x)\neq 0$ para $x\neq c$ e $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ mostre que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{|f(x)|}=\infty$.

5. Seja f uma função tal que $x^3\leq f(x)\leq x^2$, para todo $x\leq 1$. O que você pode dizer a respeito de:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$d)\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

6. Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^h-1}{x^m-1}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ $\qquad e)\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

7. Se $|f(x)-1| \leq (x-1)^2$, calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Você pode dizer algo sobre $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

8. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função tal que $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{x^4+1}$. Mostre que f é contínua na origem.

9. Encontre, quando existir, os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 3}(2x+|x-3|)$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to -6} \dfrac{2x+12}{|x+6|}$

$d)\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-|x|}{2+x}$ $\qquad e)\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$

10. Determine os valores das constantes a e b que tornam as funções contínuas para todo x real.

$a)\ f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x^2+a, & x > 1 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} 3x+7, & x \leq 4 \\ ax-1, & x > 4 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \\ a^2x-a, & x \geq 3 \end{cases}$

$d)\ f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ ax+b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}$

11. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 2x-4, & x < 2 \\ ax^2-bx, & x \geq 2 \end{cases}$

$a)$ Para que valores de a e b f é contínua?

$b)$ Seja $m(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Encontre a e b para que exista $\lim\limits_{x\to 2} m(x)$.

12. Seja g uma função tal que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 1$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in Dom g$, $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{2} < g(x) < \dfrac{3}{2}$.

13. (Conservação do sinal) Se f é uma função continua em c e $f(c) > 0$ mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in]c-\delta, c+\delta[$.

14. Seja f definida em $I\!R$ e tal que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule:

    $a)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$

    $b)$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$

15. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}, & x \neq 5 \\ a, & x = 5 \end{cases}$. Determine o valor de a para que f seja contínua em 5.

16. Se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ e f é contínua na origem, mostre que $f(0) = 0$.