MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 7 – 30/05/2019

Parte 1 - Fórmula de Taylor

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5, em torno de x_0 dado, nos seguintes casos:

   (a) $f(x) = senx; \quad x_0 = 0$

   (b) $f(x) = cosx; \quad x_0 = 0$

   (c) $f(x) = lnx; \quad x_0 = 1$

   (d) $f(x) = (1+x)^\alpha; \quad x_0 = 0$, onde $\alpha \neq 0$ é um número real dado.

2. Determine o poliômio de Taylor de ordem n para as funções de item 1.

   (a) Determine o polinômio de Taylor de $f(x) = e^x$, de ordem n, em torno de $x_0 = 0$

   (b) Mostre que, para todo x em $[0, 1]$,

   $$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   (c) Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

   item Sejam n um natural impar e $f(x) = senx$. Mostre que, para todo x,

   $$\left| senx - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

3. Avalie $sen1$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

4. Mostre que, para todo x,

   $$senx = \lim_{n\to\infty}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

   $$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ldots$$

5. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (a) Use a fórmula da progressão geométrica para mostrar que o polinômio de Taylor de f em torno de $x_0 = 0$ de ordem 10 é $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$.

   (b) Observando o polinômio do item (a), calcule $f^{(n)}(0)$ para $n = 1, 2 \ldots 10$.

6. Se $p(x)$ é um polinômio de grau n mostre que

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) \ldots + \frac{p^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

   onde $c, x \in \mathbb{R}$.

7. Mostre que o polinômio de Taylor da derivada f' de uma funçãof é a derivada do polinômio de Taylor de f.

8. Se $P_{n,c}$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função f então o polinônio de Taylor de ordem $n+1$ de $g(x) = \int_c^x f(t)dt$ é a integral $\int_c^x P_{n,c}(t)dt$.

9. Mostre que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

10. Se $g(x) = f(x-c)$ e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de f na origem então $P_n(x-c)$ é o polinômio de g com centro em c .

11. Utilize os exercícios 5 e 8 para encontrar o polinômio de Taylor de ordem 10 da função arctan em torno do ponto $c = 0$.

12. Determine o polinômio da função $f(x) = \ln(1+x)$ em torno do ponto $c = 0$ usando 5 e 9.

Parte 2 - Equaçoes Diferenciais

1. Resolva as equações:

   $a)$ $y' = e^{x-2y}$ $\qquad$ $b)$ $(senx)y' + (cosx)y = 1$

   $c)$ $y' = x^3 - 2xy$

2. Encontre as soluções que verificam a condição inicial dada:

   $a)\ y' = x/y;\quad y(0) = 1$ $\qquad$ $b)\ y' = x(y+1);\quad y(0) = -1$

3. Determine as soluções constantes da equação

$$\frac{dx}{dt} = 9 - x^2$$

   e faça um esboço das soluções.

Parte 3 - Aplicações

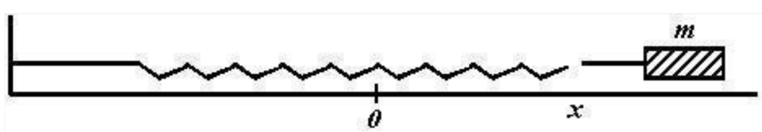
1. A lei do resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente. Se um corpo está à temperatura de $120°C$ e após 40 minutos a sua temperatura é de $60°C$, estando o ambiente a $35°C$, qual a temperatura do corpo após 100 minutos (a partir de 120°C)?

2. Considere um corpo de massa unitária sujeito à ação de uma mola com constante 5.

   (a) Escreva a equação diferencial do movimento e sua solução geral.

   (b) Determine a natureza do movimento.

   (c) Ache a solução particular que parte da posição de equilíbrio com velocidade inicial igual a 4. Esboce o gráfico da solução.



3. Suponha que uma sala contendo inicialmente $60m^3$ de ar esteja inicialmente livre de monóxido de carbono. Começa-se a fumar cigarros e o ar expelido a uma taxa de $0,003m^3/min$ contém 4% de monóxido de carbono. A mistura homogeneizada deixa a sala na mesma taxa.

   (a) Encontre a porcentagem em volume do monóxido de carbono em um instante qualquer t.

   (b) Uma exposição prolongada ao monóxido de carbono à uma porcentagem de $0,012$ é prejudicial ao organismo humano. Depois de quanto tempo é atingida esta concentração na sala?

4. Um recipiente contém um volume V (em litros) de uma solução salina, sendo a massa de sal dissolvida igual a m_0 quilogramas no instante inicial. Uma outra solução de concentração k (em kg/l) penetra no recipiente a uma razão constante de r litros por minuto. A solução se mantém perfeitamente misturada no recipiente, de onde sai à razão de r litros por minuto. Seja $x(t)$ a concentração da solução no recipiente no instante t.

   a) Determine a equação diferencial que admite $x(t)$ como solução.

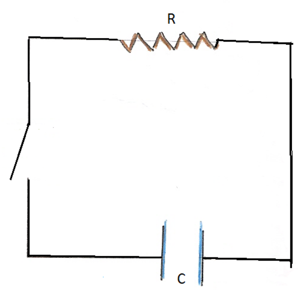
   b) Resolva a equação obtida no item (a).

   c) Usando o item (b), determine em que condições $x(t)$ é crescente e em que condições $x(t)$ é

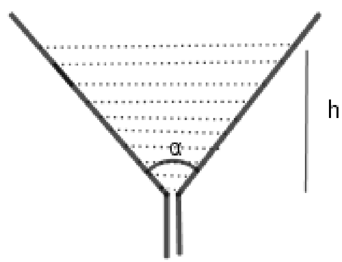
   decrescente. Interprete os resultados.

   d) Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Interprete o resultado.

5. Num circuito RC, carrega-se o capacitor com uma carga de 2 coulombs. Qual a corrente no circuito depois de ligada a chave, sabendo-se que $R = 20$ ohms e $C = 0,05$ farad?



6. Um funil cônico com um ângulo de saida $\alpha = 90^o$ está com água a uma altura de $1m$. Sabendo-se que a saida possui uma seção de $1cm^2$ e que no instante $t = 0$ a saida é aberta determine o tempo gasto para escoar toda a água.



7. A população de uma cidade é de 1.000.000 habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu o vírus. Em 7 dias, esta porcentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos sãos e enfermos, sendo a taxa de variação na porcentagem de enfermos proporcional ao número de contatos e este, proporcional ao produto das porcentagens de sãos e enfermos. Supondo a população fixada, pergunta-se: após quanto tempo os enfermos serão 50% da população?

8. A velocidade de desintegração de um material radioativo é proporcional a quantidade de material em cada instante.

   (a) Escreva a equação diferencial que traduz a desintegração.

(b) A meia-vida do urânio-235 é 713 milhões de anos. O que significa isso?

(c) O urânio-235, ao se desintegrar, origina o chumbo-207. Uma certa amostra de rocha contém 1g de urânio-235 para cada 31g de chumbo-207. Supondo que inicialmente a rocha fosse de urânio-235 apenas, qual a sua idade?

(d) Outra amostra contém 2g de urânio-235 para cada 28g de chumbo-207. Qual a sua idade?