MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista de exercícios 5 - 21/05/2019 - BMAC

1. Considere a função $f(x) = x^2$ definida no intervalo $[0,1]$ e P_n a partição que divide $[0,1]$ em n partes iguais.
   (a) Calcule $S(f, P_n)$ e $s(f, P_n)$.
   (b) Encontre $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$ e $\lim_{n\to\infty} s(f, P_n)$.
   (c) Conclua da parte b que $\int_0^1 x^2 dx$ existe e determine seu valor.

2. Mostre que $f(x) = senx/x$ é decrescente no intervalo $]0, \pi/2]$ e utilize este resultado para mostrar que:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{senx}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Seja $f : [a,b] \to I\!R$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   é uma função crescente.

4. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

   (1) Faça um gráfico de f;
   (2) Encontre a função $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$, $t \in [0,2]$;
   (3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

   $a)$ $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   $b)$ $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   $c)$ $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

5. Calcule a área da região

   $a)$ limitada pela reta $y = 2x + 1$ e pela curva $y = x^2$;
   $b)$ limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;
   $c)$ pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ para $x \in [0,2]$;
   $d)$ limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

6. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \quad a > 0$$

7. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

8. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2\int_{a}^{b} f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

9. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

   $a)$ Se f e g são contínuas, então

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \int_{a}^{b} g(x)dx$$

   $b)$ $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1 + ln(x)}{x}dx = \frac{3}{2}$

   $c)$ Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = ln\left(|sec(x)|\right)$.

10. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$, interpretando-a como uma área.

11. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 sen\left(x^2 + 1\right) dx$.

12. Se $\displaystyle\int_{0}^{x^2} f(t)dt = xsen(\pi x)$, onde f é contínua, encontre $f(4)$.