MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

BMAC-IME/USP

Lista de exercícios 3

04/04/2019

Parte 1 - Limites e Continuidade

1. Calcule os limites:

$a)\ \lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

$b)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

$c)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$d)\ \lim_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

$e)\ \lim_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

$f)\ \lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

$g)\ \lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-2x}{x^2-1}$

$h)\ \lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$

$i)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

$j)\ \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$k)\ \lim_{x\to h} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{h}}{x-h}$

$l)\ \lim_{x\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

$m)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

$n)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{2x}{x-1}$

2. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in Dom(g)$, mostre que $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = 0$.

3. Se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ mostre que $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

4. Seja f é uma função. Se $f(x) \neq 0$ para $x \neq c$ e $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ mostre que $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{|f(x)|} = \infty$.

5. Seja f uma função tal que $x^3 \leq f(x) \leq x^2$, para todo $x \leq 1$. O que você pode dizer a respeito de:

$a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$

$c)\ \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$d)\ \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$e)\ \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)$

6. Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^h-1}{x^m-1}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ $\qquad e)\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

7. Se $|f(x)-1| \le (x-1)^2$, calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Você pode dizer algo sobre $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \le \dfrac{x^2}{x^4+1}$. Mostre que f é contínua na origem.

9. Encontre, quando existir, os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 3} (2x+|x-3|)$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to -6} \dfrac{2x+12}{|x+6|}$

$d)\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-|x|}{2+x}$ $\qquad e)\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$

10. Determine os valores das constantes a e b que tornam as funções contínuas para todo x real.

$a)\ f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ x^2+a, & x > 1 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} 3x+7, & x \le 4 \\ ax-1, & x > 4 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \\ a^2x-a, & x \ge 3 \end{cases}$

$d)\ f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ ax+b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \ge 4 \end{cases}$

11. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 2x-4, & x < 2 \\ ax^2-bx, & x \ge 2 \end{cases}$

$a)$ Para que valores de a e b f é contínua?

$b)$ Seja $m(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Encontre a e b para que exista $\lim\limits_{x\to 2} m(x)$.

12. Seja g uma função tal que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 1$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in Domg$,

$0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{2} < g(x) < \dfrac{3}{2}$.

13. (Conservação do sinal) Se f é uma função continua em c e $f(c) > 0$ mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in]c - \delta, c + \delta[$.

14. Seja f definida em $I\!R$ e tal que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcule:

   $a)\ \lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

15. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & x \neq 5 \\ a, & x = 5 \end{cases}$. Determine o valor de a para que f seja contínua em 5.

16. Se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ e f é contínua na origem, mostre que $f(0) = 0$.

Parte 2 - Derivadas

1. Calcule $f'(x)$ sendo:

   $a) f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 2x)$

   $b) f(x) = \frac{x}{x+1}$

   $c) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2}$

   $d) f(x) = 5(x-1)(x+2)(x^3+1)$

   $e) f(x) = \sqrt[7]{x} + 2\sqrt{x}$

   $f) f(x) = \sqrt{x}(x - 1)$

   $g) f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

2. Verifique se as funções abaixo têm derivadas em 0. Justifique sua resposta.

   $a) f(x) = |x| - x$ $\qquad$ $b) f(x) = x\,|x|$

3. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = 2x^2 + 3$ e paralelas à reta $8x - y + 3 = 0$.

4. Encontre as equações das retas que passam pelo ponto $(3, -2)$ e são tangentes à curva $y = x^2 - 7$.

5. Demonstre analiticamente que não existe reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é tangente à curva $y = 4 - x^2$.

6. A **reta normal** ao gráfico de uma função $y = f(x)$ num ponto P do mesmo é a reta normal à tangente ao gráfico da função nesse ponto. Determine a reta normal ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$.

7. Considere a função $f(x) = \frac{5x}{1 + x^2}$.

   $a)$ Determine $f'(x)$ usando a definição de derivada.

b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,2)$.

c) Determine os pontos do gráfico de f onde a reta tangente é horizontal.

d) Encontre a reta normal ao gráfico de f.

8. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = \sqrt{4x-3} - 1$ e perpendiculares à reta $x + 2y - 11 = 0$.

9. Determine uma reta que tangencie as parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 8x - 10$.

10. Determine a e b para que f seja derivável, sendo $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & x > 1 \end{cases}$.

11. Mostre que a reta tangente à hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ no ponto $(a, \dfrac{1}{a})$ intercepta os eixos coordenados nos pontos $(2a, 0)$ e $(0, \dfrac{2}{a})$.

12. Calcule a derivada primeira e a derivada segunda das seguintes funções:

$a)f(x) = g(\dfrac{x+1}{x-1})$

$b)f(t) = u(t)^2 + v(t)^2$

$c)f(x) = g(g(x))$

$d)f(x) = \dfrac{u(x)^2}{v(x)^2}$

13. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Suponha que exista $m > 0$ tal que $|f(x)| \leq mx^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que f é contínua e derivável em 0.

b) Existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$? Se sim, prove. Se não, exiba um contra exemplo.

14. Seja f definida em $\mathbb{R}$, derivável em 0 e tal que $f(0) = 0$. Prove que existe uma função g definida em $\mathbb{R}$, contínua em 0, tal que $f(x) = xg(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

15. Seja r uma reta tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{2} + x^2$. Determine r.

16. Encontre a distância entre a parábola $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x - 1$.

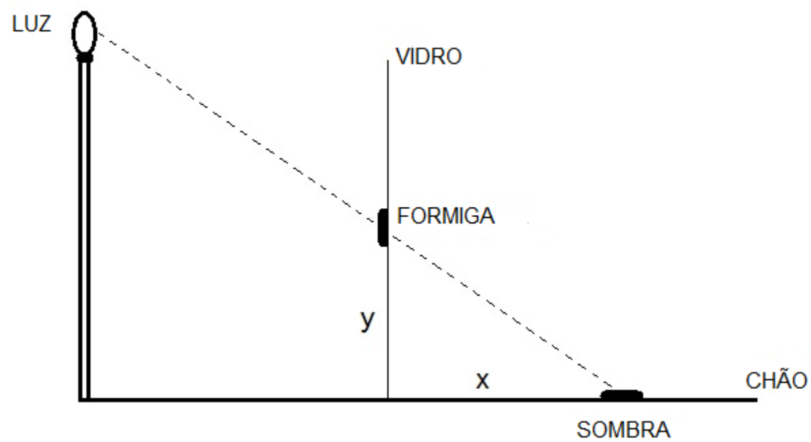
17. Mostre que a reta tangente à parábola $y = ax^2$ no ponto (x_0, y_0) intercepta o eixo x na metade de x_0.

18. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$.

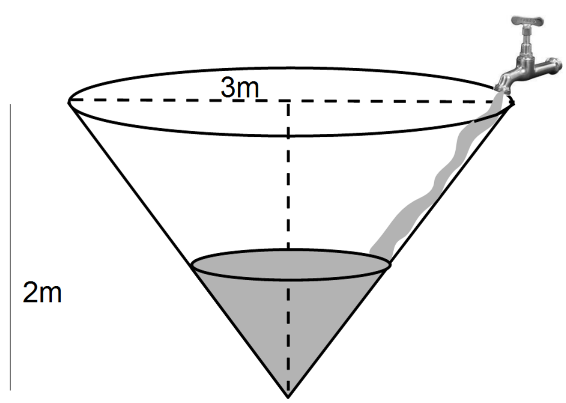
19. Uma bolinha de naftalina perde sua massa numa taxa que é proporcional à sua área. Se depois de um mês ela perdeu a metade de sua massa, depois de quanto tempo desaparecerá?

20. Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume da areia cresce a uma taxa de $10m^3/h$, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de $4m$?

21. Uma formiga sobe uma parede de vidro com velocidade constante V. Determine a velocidade da sombra no chão (ver figura).



22. Entra água num tanque cônico a uma taxa de $2litros/min$. Determine a variação instantânea da altura em ralação ao tempo no instante em que $h = 1$ (ver figura).



23. Em um tanque cônico entra água a uma taxa de $3litros/min$. Se a altura do tanque é de $20m$ e o raio da base é $10m$, qual a velocidade de ascenção da água no instante em que o nível encontra-se na metade da altura?