MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista de exercícios 5

29/05/2017

1. Mostre que $f(x) = senx/x$ é decrescente no intervalo $]0, \pi/2]$ e utilize este resultado para mostrar que:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{senx}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Seja $f : [a, b] \to I\!R$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma função crescente.

3. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

(1) Faça um gráfico de f;
(2) Encontre a função $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, $t \in [0, 2]$;
(3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

$a)$ $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$b)$ $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$c)$ $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

4. Calcule a área da região

$a)$ limitada pela reta $y = 2x + 1$ e pela curva $y = x^2$;
$b)$ limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;
$c)$ pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ para $x \in [0, 2]$;
$d)$ limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

5. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

6. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

7. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2\int_{a}^{b} f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

8. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

   $a)$ Se f e g são contínuas, então

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \int_{a}^{b} g(x)dx$$

   $b)$ $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1 + ln(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$

   $c)$ Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = ln\left(|sec(x)|\right)$.

9. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$, interpretando-a como uma área.

10. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 sen\left(x^2 + 1\right) dx$.

11. Se $\displaystyle\int_{0}^{x^2} f(t)dt = xsen(\pi x)$, onde f é contínua, encontre $f(4)$.

12. Calcule as integrais abaixo:

1) $\int \frac{x^7+x^2+1}{x^2}dx$

2) $\int cos(7x)dx$

3) $\int \frac{7}{x-2}dx$

4) $\int tg^3xdx$

5) $\int 2x(x+1)^{2010}dx$

6) $\int x^2e^xdx$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}dx, \;\; a>0$

8) $\int sec^3xdx$

9) $\int x^5e^{-x^3}dx$

10) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

11) $\int e^{2x}dx$

12) $\int tg^2xdx$

13) $\int tgxdx$

14) $\int e^x cosxdx$

15) $\int x^r lnxdx, \;\; r \in I\!R$

16) $\int cos^3xdx$

17) $\int xe^{-x}dx$

18) $\int \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx$

19) $\int tg^6xsec^4xdx$

20) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+2}}dx$

13. Calcule as integrais abaixo:

1) $\int \frac{sen^3x}{\sqrt{cosx}}dx$

2) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$

3) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$

4) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

5) $\int \frac{dx}{(arcsenx)\sqrt{1-x^2}}$

6) $\int \frac{sen2x}{1+cos^2x}dx$

7) $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$

8) $\int \frac{1-senx}{cosx}dx$

9) $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

10) $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}dx$

11) $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}dx$

12) $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}dx$

13) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

14) $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$

15) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

16) $\int a^x dx, \quad a>0$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}dx$

18) $\int sen(lnx)dx$

19) $\int \frac{x}{x^2-4}dx$

20) $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}dx$

21) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

22) $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}dx$

23) $\int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}dx$

24) $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)}dx$