

MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista de exercícios 5

24/05/2016

1. Mostre que $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é decrescente no intervalo $]0, \pi/2]$ e utilize este resultado para mostrar que:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma função crescente.

3. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

- (1) Faça um gráfico de f ;
- (2) Encontre a função $F(t) = \int_0^t f(x) dx$, $t \in [0, 2]$;
- (3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

c) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

4. Calcule a área da região

- a) limitada pela reta $y = 2x + 1$ e pela curva $y = x^2$;
- b) limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;
- c) pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ para $x \in [0, 2]$;
- d) limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

5. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad a > 0$$

6. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

7. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2 \int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

8. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

a) Se f e g são contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

b) $\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$

c) Uma primitiva de $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ é $F(x) = \ln(|\sec(x)|)$.

9. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1-x^2}) dx$, interpretando-a como uma área.

10. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \operatorname{sen}(x^2 + 1) dx$.

11. Se $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \operatorname{sen}(\pi x)$, onde f é contínua, encontre $f(4)$.

12. Calcule as integrais abaixo:

$$1) \int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$2) \int \cos(7x) dx$$

$$3) \int \frac{7}{x-2} dx$$

$$4) \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$5) \int 2x(x+1)^{2010} dx$$

$$6) \int x^2 e^x dx$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0$$

$$8) \int \sec^3 x dx$$

$$9) \int x^5 e^{-x^3} dx$$

$$10) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$11) \int e^{2x} dx$$

$$12) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$13) \int \operatorname{tg} x dx$$

$$14) \int e^x \cos x dx$$

$$15) \int x^r \ln x dx, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$16) \int \cos^3 x dx$$

$$17) \int x e^{-x} dx$$

$$18) \int \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$$

$$19) \int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$$

$$20) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 2}} dx$$

13. Calcule as integrais abaixo:

$$1) \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\operatorname{cos} x}} dx$$

$$3) \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$$

$$7) \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$$

$$9) \int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$11) \int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$$

$$13) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$15) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} dx$$

$$19) \int \frac{x}{x^2-4} dx$$

$$21) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$23) \int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} dx$$

$$2) \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$4) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$6) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{cos}^2 x} dx$$

$$8) \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx$$

$$10) \int \frac{1}{2x^2+8x+20} dx$$

$$12) \int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$$

$$14) \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$16) \int a^x dx, \quad a > 0$$

$$18) \int \operatorname{sen}(\ln x) dx$$

$$20) \int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$$

$$22) \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx$$

$$24) \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} dx$$