MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 1 – 22/02/2016

Parte 1 - Operações

1. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $1 = 2 \Longrightarrow 2 = 3$

   (b) Se $a, b \in \mathbb{Z}_5$ então $(a^2 + b^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ e $b = 0)$

   (c) $ax = a \Longrightarrow x = 1$

   Obs: $\mathbb{Z}_5$ é o nome matemático para o relógio de cinco horas.

2. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ prove que $(a/b)^{-1} = b/a$.

3. Prove que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

   para $r \neq 1$.

4. No exercício 3, faça $r = a/b$ e conclua que

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots + a^n$$

5. Se $n + 1$ é impar mostre que

$$b^{n+1} + a^{n+1} = (b + a)(b^n - b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots - a^n)$$

Parte 2 - Ordem

1. $a < b$ e $c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

2. $a < b \Longrightarrow -b < -a$

3. $a > 0$ e $b > 0 \Longrightarrow ab > 0$

4. $a > 1 \Longrightarrow a^2 > a$

5. $0 < a < 1 \Longrightarrow a^2 < a$

6. $b > a > 0 \Longrightarrow b^2 > a^2$

7. Se $a, b, c, d > 0$, $a < b$ e $c < d$ então $ac < bd$

8. $a < b \Longrightarrow a^3 < b^3$

9. Se $a, b > 0$ mostre que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

10. Se $ab \neq 0$ mostre que $b^2 + ab + a^2 > 0$

11. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

12. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = -b$

13. Se $a, b > 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$

14. Considere a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ onde $a > 0$. Ela é equivalente a
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
Complete o quadrado somando $(b/2a)^2$ dos dois lados e mostre que
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
Conclua disto que se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ então
$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

15. Se a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais, encontre os coeficientes do trinômio de segundo grau
$$ax^2 + bx + c = (a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2$$
Use o fato que $ax^2 + bx + c \geq 0$ para mostrar que
$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

16. Verifique se o conjunto
$$K = \{a + b\sqrt{2} \ : a, b \in \mathbb{Q}\}$$
com as operações de adição e produto e a relação de ordem induzidas de $\mathbb{R}$ verifica todos os axiomas dos números reais.

17. Verifique se o conjunto
$$K = \{a + b\pi \ : a, b \in \mathbb{Q}\}$$
com as operações de adição e produto e a relação de ordem induzidas de $\mathbb{R}$ verifica todos os axiomas dos números reais.

Parte 3 - Completude

1. Verifique quais das sequências abaixo são crescentes e limitadas superiormente ou decrescentes e limitadas inferiormente. Nestes casos determine seu limite:

   (a) $s_n = (1+n)/n$

   (b) $s_n = (n-1)/n$

   (c) $s_n = (1+n)/n^2$

   (d) $s_n = \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

   (e) $s_n = (-1)^n/(n+1)$

   (f) $s_n = n^2/(n+1)$

   (g) $s_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{0}{2^4} + \ldots + \dfrac{?}{2^n}$

   (h) $s_n = n/(n^2+1)$

   (i) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ ou indutivamente
   $$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$$

   (j) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ ou indutivamente
   $$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2 s_n}$$

2. Se $a > 0$ mostre que a sequência

$$x_0 = a \;\text{ e }\; x_{n+1} = \frac{(x_n + \frac{a}{x_n})}{2}$$

é decrescente e limitada inferiormente. Determine seu limite.

3. Mostre que a sequência

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

é crescente e use o fato que $1/n! < 1/2^{n-1}$ para mostrar que $s_n < 3$. Do axioma da completude conclua que existe o número

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n$$

4. Seja p_n o perímetro do polígono regular com 2^n lados inscrito na circunferência de raio unitário. Se l_n é seu lado então, $p_n = 2^n l_n$. Mostre que (p_n) é uma sequência crescente a partir de $p_2 = 4\sqrt{2}$ e limitada superiormente. Do axioma da completude conclua que existe o número π tal que

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} p_n$$

5. Para os conjuntos A abaixo determine, quando houver, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$:

   (a) $A = [a, b]$ onde $a < b$

   (b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 1011, 13\}$

   (c) $A =]a, b[$ onde $a < b$

   (d) $A = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \;\;, \; 0 < p < q \;, \; \mathrm{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < 1011, 13\right\}$

   (e) $A = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \;\;, \; 0 < p < q \;, \; \mathrm{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < n\right\}$

   (f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$

   (g) $A = \left\{e^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0\right\}$

   (h) $A = \left\{\cos\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0\right\}$

   (i) $A = \{f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0\}$ onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente

   (j) $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente

Parte 4 - Números Naturais

1. Prove por indução:
   (a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = n^2$
   (b) $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

2. Se m, n são naturais com $n \geq m$, então existe d natural tal que $n = m + d$ (isto é, $d = n - m$ é a diferença entre n e m).

3. (a) Determine a, b e c naturais tais que

$$\frac{(an+b)n}{c} + (2n+3) = \frac{(a(n+1)+b)(n+1)}{c}$$

   (b) Considere o conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+2)n\}$$

   Mostre que $n \in A \Longrightarrow (n+1) \in A$. É verdade que $A = \mathbb{N}$?

4. (a) Determine a, b e c naturais tais que

$$\frac{(an+b)^2}{c} + (n+1) = \frac{(a(n+1)+b)^2}{c}$$

   (b) Considere o conjunto

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(2n+1)^2}{8} \right\}$$

   Mostre que $n \in A \Longrightarrow (n+1) \in A$. Podemos concluir que $A = \mathbb{N}$?

5. O "coeficiente binomial" é o número

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!\ k!} \qquad n, k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad k \leq n$$

   Este é também o número de combinações de n elementos k a k.

   (a) Mostre que:

i. $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$

(b) Prove por indução o teorema binomial

$$(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$$

(c) Mostre que:

i. $2^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$

ii. $0 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} - \ldots (-1)^n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$

(d) Utilize a fórmula do binômio de Newton para mostrar que

$$\begin{aligned} (1+1/n)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-1/n) + \frac{1}{3!}(1-1/n)(1-2/n) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!}(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(n-1)/n) \end{aligned}$$

e conclua que

$$(1+1/n)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

6. Do teorema binomial temos

$$\begin{array}{ccccccccc} (1+1)^3 & = & 1^3 & + & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\ (2+1)^3 & = & 2^3 & + & 3\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1 \\ (3+1)^3 & = & 3^3 & + & 3\cdot 3^2 & + & 3\cdot 3 & + & 1 \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots \\ (n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1 \end{array}$$

Somando membro a membro os dois lados das igualdades, encontre uma fórmula para

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

7. Encontre fórmulas para

   (a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$

   (b) $\frac{3}{1\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$

8. Sabendo-se que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, determine uma fórmula para

$$S=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2$$