

# MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

## Lista de exercícios 6

27/06/2015

1. Considere a função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Seja  $P_n$  a partição do intervalo  $[0, 2]$  em  $n$  partes iguais.

- a) Calcule  $s(f, P_n)$  e  $S(f, P_n)$  para  $n = 4, 5, 6, 7$ ;  
b) Dê uma expressão para  $s(f, P_n)$  e  $S(f, P_n)$  para  $n = 2k$  e  $n = 2k + 1$  ( $n$  par ou ímpar);  
c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n)$ .
2. Mostre que  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  é decrescente no intervalo  $]0, \pi/2]$  e utilize este resultado para mostrar que:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma função crescente.

4. Para as funções  $f$  abaixo, responda as seguintes perguntas:

- (1) Faça um gráfico de  $f$ ;  
(2) Encontre a função  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ ,  $t \in [0, 2]$ ;  
(3) Determine os pontos onde  $F$  é derivável e neles calcule  $F'(t)$ .

a)  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b)  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

c)  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

5. Calcule a área da região

- a) limitada pela reta  $y = 2x + 1$  e pela curva  $y = x^2$ ;
- b) limitada pelas curvas  $y = 1 - x^2$  e  $y = x^2 - 1$ ;
- c) pelos gráficos de  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x^3$  para  $x \in [0, 2]$ ;
- d) limitada pelas curvas  $y = x^2 - x$ ,  $x = 2$  e  $y = 0$ .

6. Seja  $f$  uma função contínua tal que  $f(x) = f(-x)$ . Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

7. Seja  $f$  uma função contínua tal que  $f(-x) = -f(x)$ . Mostre que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

8. Se  $f$  é derivável e  $f'$  é contínua, mostre que

$$2 \int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

9. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

a) Se  $f$  e  $g$  são contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

b)  $\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$

c) Uma primitiva de  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  é  $F(x) = \ln(|\sec(x)|)$ .

10. Calcule  $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2}) dx$ , interpretando-a como uma área.

11. Calcule  $\int_{-1}^1 x^3 \operatorname{sen}(x^2 + 1) dx$ .

12. Se  $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \operatorname{sen}(\pi x)$ , onde  $f$  é contínua, encontre  $f(4)$ .

13. Calcule as integrais abaixo:

$$1) \int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$2) \int \cos(7x) dx$$

$$3) \int \frac{7}{x-2} dx$$

$$4) \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$5) \int 2x(x+1)^{2010} dx$$

$$6) \int x^2 e^x dx$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0$$

$$8) \int \sec^3 x dx$$

$$9) \int x^5 e^{-x^3} dx$$

$$10) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$11) \int e^{2x} dx$$

$$12) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$13) \int \operatorname{tg} x dx$$

$$14) \int e^x \cos x dx$$

$$15) \int x^r \ln x dx, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$16) \int \cos^3 x dx$$

$$17) \int x e^{-x} dx$$

$$18) \int \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$$

$$19) \int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$$

$$20) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 2}} dx$$

14. Calcule as integrais abaixo:

- 1)  $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
- 2)  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
- 3)  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
- 4)  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
- 5)  $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$
- 6)  $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$
- 7)  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$
- 8)  $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$
- 9)  $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$
- 10)  $\int \frac{1}{2x^2+8x+20} dx$
- 11)  $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$
- 12)  $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$
- 13)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 14)  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
- 15)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$
- 16)  $\int a^x dx, \quad a > 0$
- 17)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} dx$
- 18)  $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$
- 19)  $\int \frac{x}{x^2-4} dx$
- 20)  $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$
- 21)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$
- 22)  $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx$
- 23)  $\int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} dx$
- 24)  $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} dx$