

MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista de exercícios 5

27/06/2015

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em torno de x_0 dado nos seguintes casos:

a) $f(x) = \operatorname{sen}x; \quad x_0 = 0$

b) $f(x) = \operatorname{cos}x; \quad x_0 = 0$

c) $f(x) = \ln x; \quad x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x_0 = 1$

e) $f(x) = (1+x)^\alpha; \quad x_0 = 0$, onde $\alpha \neq 0$ é um número real dado.

2. a) Determine o polinômio de Taylor de $f(x) = e^x$, de ordem n , em torno de $x_0 = 0$;

b) Mostre que, para todo x em $[0, 1]$,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

c) Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

3. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = \operatorname{sen}x$. Mostre que, para todo x ,

$$\left| \operatorname{sen}x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

4. Avalie $\operatorname{sen}1$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} . (Sugestão o Exercício 3)

5. Mostre que, para todo x ,

$$\operatorname{sen}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

ou

$$\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

6. Seja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Mostre que $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ é o polinômio de Taylor, de ordem 10, de f em torno de $x_0 = 0$. (Não é necessário calcular as derivadas de f)

b) Mostre que a função $E(x)$ dada por

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + E(x)$$

é contínua em \mathbb{R} .

c) Observando o polinômio do item (a), calcule $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, etc.

7. Mostre que o polinômio de Taylor da derivada f' de uma função f a derivada do polinômio de Taylor de f .
8. Se $g(x) = f(x - c)$ e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de f na origem então $P_n(x - c)$ é o polinômio de g com centro em c .