MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional - IME/USP

Lista de exercícios 4

23/04/2015

1. Encontre as equações das retas que passam pelo ponto $(3, -2)$ e são tangentes à curva $y = x^2 - 7$.

2. Demonstre analiticamente que não existe reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é tangente à curva $y = 4 - x^2$.

3. A **reta normal** ao gráfico de uma função $y = f(x)$ num ponto P do mesmo é a reta normal à tangente ao gráfico da função nesse ponto. Determine a reta normal ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$.

4. Considere a função $f(x) = \dfrac{5x}{1 + x^2}$.

   $a)$ Determine $f'(x)$ usando a definição de derivada.

   $b)$ Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 2)$.

   $c)$ Determine os pontos do gráfico de f onde a reta tangente é horizontal.

   $d)$ Encontre a reta normal ao gráfico de f.

5. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = \sqrt{4x - 3} - 1$ e perpendiculares à reta $x + 2y - 11 = 0$.

6. Determine uma reta que tangencie as parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 8x - 10$.

7. Esboce os gráficos das seguintes funções, indicando os intervalos em que cada função é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize os pontos de inflexão e todos os valores máximos ou mínimos que existirem.

   $a) f(x) = x^4 - x^2$

   $b) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

   $c) f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

   $d) f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

   $e) f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$

   $f) f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$

   $g) f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

   $h) f(x) = (x + 1)^{1/3}$

   $i) f(x) = x\sqrt{3 - x}$

   $j) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1 - (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$

8. Determine a e b para que f seja derivável, sendo $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & x > 1 \end{cases}$.

9. Mostre que a reta tangente à hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no ponto $(a, \frac{1}{a})$ intercepta os eixos coordenados nos pontos $(2a, 0)$ e $(0, \frac{2}{a})$.

10. Calcule a derivada primeira e a derivada segunda das seguintes funções:

$a) f(x) = g(\frac{x+1}{x-1})$ $\qquad$ $b) f(t) = u(t)^2 + v(t)^2$

$c) f(x) = g(g(x))$ $\qquad$ $d) f(x) = \frac{u(x)^2}{v(x)^2}$

11. Seja f uma função definida em $I\!R$. Suponha que exista $m > 0$ tal que $|f(x)| \leq mx^2$, $\forall x \in I\!R$.

a) Mostre que f é contínua e derivável em 0.

b) Existe $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$? Se sim, prove. Se não, exiba um contra exemplo.

12. Seja f definida em $I\!R$, derivável em 0 e tal que $f(0) = 0$. Prove que existe uma função g definida em $I\!R$, contínua em 0, tal que $f(x) = xg(x)$, $\forall x \in I\!R$.

13. Seja r uma reta tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$. Determine r.

14. Encontre a distância entre a parábola $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x - 1$.

15. Mostre que a reta tangente à parábola $y = ax^2$ no ponto (x_0, y_0) intercepta o eixo x na metade de x_0.

16. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$.

17. Uma bolinha de naftalina perde sua massa numa taxa que é proporcional à sua área. Se depois de um mês ela perdeu a metade de sua massa, depois de quanto tempo desaparecerá?

18. Um avião, voando horizontalmente com uma velocidade constante v e a uma altura h, deixa cair um objeto. Desprezando-se a resistência do ar, determinar o tempo de queda e o local onde caiu, tomando-se como referência o ponto no solo sob o ponto de lançamento.

19. Determine um polinômio $p(x)$ de grau 2 tal que $p(2) = 5$, $p^{'}(2) = 3$ e $p^{''}(2) = 2$.

20. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 3)$ e que é tangente à circunferência com centro na origem e raio igual a 1.

21. Calcule a segunda derivada da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

22. Considere a parte da curva $y = \dfrac{1}{x}$ que fica no primeiro quadrante e desenhe a tangente num ponto arbitrário (x_0, y_0) dessa curva.

    $a)$ Mostre que a porção da reta tangente compreendida entre os eixos tem como ponto médio o ponto de tangência.

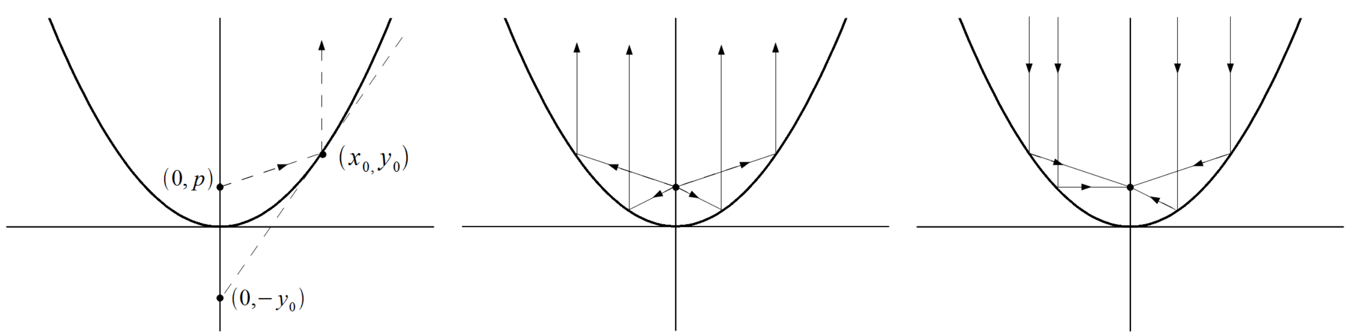
    $b)$ Ache a área do triângulo formado pelos eixos e pela tangente e verifique que essa área é independente da localização do ponto de tangência.

23. Seja p uma constante positiva e considere a parábola $x^2 = 4py$ com vértice na origem e o foco no ponto $(0, p)$, como é mostrado na figura abaixo (à esquerda). Seja (x_0, y_0) um ponto dessa parábola, diferente do vértice.

    $a)$ Mostre que a tangente em (x_0, y_0) tem coeficiente linear $-y_0$.

    $b)$ Mostre que o triângulo com vértices (x_0, y_0), $(0, -y_0)$ e $(0, p)$ é isósceles.

    $c)$ Suponha que uma fonte de luz seja colocada no foco e que cada raio de luz deixando o foco seja refletido pela parábola de tal modo que ele forme ângulos iguais com a reta tangente no ponto de reflexão (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). Use $b)$ para mostrar que, após a reflexão, cada raio aponta verticalmente para cima, paralelo ao eixo y (figura abaixo, no meio) [1].



24. Use a propriedade da reflexão das parábolas para mostrar que as duas tangentes a uma parábola nas extremidades de uma corda que passa pelo foco são perpendiculares entre si.

25. $a)$ Mostre que $y = x^2 + a/x$ tem um mínimo, mas não um máximo para qualquer valor da constante a.

    $b)$ Determine o ponto de inflexão de $y = x^2 - 8/x$.

[1]Essa é a chamada *propriedade de reflexão das parábolas*. Para formar uma ideia tridimensional da maneira como essa propriedade é usada no design de holofotes e faróis de automóvel, temos apenas de imaginar um espelho construído, girando-se uma parábola ao redor de seu eixo e prateando o lado interno da superfície resultante. Tal refletor parabólico pode ser também usado ao contrário (figura acima, à direita) para juntar os raios fracos, que chegam paralelos ao eixo, e concentrá-los no foco. Este é princípio básico das antenas de radar, radiotelescópios e telescópios ópticos refletores.

26. Encontre a e b tais que $y = a\sqrt{x} + \dfrac{b}{\sqrt{x}}$ tenha $(1, 4)$ como um ponto de inflexão.

27. Mostre que a curva cúbica genérica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem um único ponto de inflexão e três formas possíveis, conforme seja $b^2 > 3ac$, $b^2 = 3ac$ ou $b^2 < 3ac$. Esboçe essas formas.

28. Mostre que qualquer polinômio de grau ímpar $n \geq 3$ tem pelo menos um ponto de inflexão.

29. Considere a função $f(x) = x^m (1-x)^n$, onde m e n são inteiros positivos, e mostre que:

    $a)$ se m é par, f tem um mínimo em $x = 0$;

    $b)$ se n é par, f tem um mínimo em $x = 1$;

    $c)$ f tem um máximo em $x = \dfrac{m}{m+n}$, independente de m e n serem pares ou não.

30. Esboce o gráfico de uma função $f(x)$ definida para $x > 0$ e tendo as propriedades: $f(1) = 0$ e $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (para todo $x > 0$).

31. Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

32. Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de $R\$640,00$ por metro, enquanto, em terra, custa $R\$312,00$. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

33. Um certo cartaz deverá ter 600cm^2 para a mensagem impressa; deve ter $7,5$cm de margem no topo e na base e uma margem de 5cm em cada lado. Determine as dimensões totais do cartaz para que a quantidade de papel usada seja mínima.

34. Um arame deve ser cortado em duas partes, uma delas será dobrada em forma de quadrado e a outra em forma circular. Determine como cortar o arame de forma que a soma das áreas delimitadas seja mínima.

35. Mostre que o quadrado tem a maior área dentre todos os retângulos inscritos numa dada circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.

36. Um homem num barco que dista 9km da praia deve chegar a um ponto que dista 15km do local da praia mais próximo ao seu barco. Sabendo que sua velocidade na água é 4km/h e na terra é 5km/h, determine o caminho a ser feito por ele para que gaste menor tempo.

37. Retirando-se quadrados iguais dos cantos de uma folha quadrada de metal e unindo as bordas podemos fazer uma caixa. Se a folha de metal tem $1,20$ metros de lado, encontre as dimensões da caixa de modo a obter o maior volume possível.

38. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4, se os lados do retângulo estiverem apoiados sobre os catetos.

39. Uma função $f : I \to I\!R$, definida num intervalo I, chama-se ***côncava para cima*** quando para quaisquer pontos a e b em I, com $a < b$, tem-se

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left[f(b) - f(a)\right], \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

a) Dados a, b em I, com $a < b$, seja r a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Escreva a equação da reta r e interprete geometricamente a desigualdade acima.

b) Se f é derivável mostre que a função derivada f' é crescente. Se além disto f admite derivada segunda então $f" \geq 0$.