

# MAT3110 - Cálculo Diferencial e Integral I

Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional - IME/USP

## Lista de exercícios 3

28/03/2015

1. Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$j) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow h} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{h}}{x - h}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x - 1}$$

2. Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $|g(x)| \leq M$ , para todo  $x \in Dom(g)$ , mostre que  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = 0$ .

3. Seja  $f$  uma função tal que  $x^3 \leq f(x) \leq x^2$ , para todo  $x \leq 1$ . O que você pode dizer a respeito de:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

4. Calcule os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^h - 1}{x^m - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$e) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

5. Se  $|f(x) - 1| \leq (x - 1)^2$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . Você pode dizer algo sobre  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ?

6. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $|f(x)| \leq \frac{x^2}{x^4 + 1}$ . Mostre que  $f$  é contínua na origem.

7. Encontre, quando existir, os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 2|}{x + 2}$

8. Determine os valores das constantes  $a$  e  $b$  que tornam as funções contínuas para todo  $x$  real.

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x^2 + a, & x > 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 3x + 7, & x \leq 4 \\ ax - 1, & x > 4 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \\ a^2x - a, & x \geq 3 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}$

9. Considere a função  $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < 2 \\ ax^2 - bx, & x \geq 2 \end{cases}$

a) Para que valores de  $a$  e  $b$   $f$  é contínua?

b) Seja  $m(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ . Encontre  $a$  e  $b$  para que exista  $\lim_{x \rightarrow 2} m(x)$ .

10. Seja  $g$  uma função tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$ . Mostre que existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in \text{Dom}g$ ,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{2} < g(x) < \frac{3}{2}.$$

11. Seja  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  e tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

12. Seja  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & x \neq 5 \\ a, & x = 5 \end{cases}$ . Determine o valor de  $a$  para que  $f$  seja contínua em 5.

13. Se  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  e  $f$  é contínua na origem, mostre que  $f(0) = 0$ .