Limites

J. A. Verderesi

Apresentamos a noção de limite e suas propriedades básicas e a partir desta definimos função contínua e derivada de uma função, que será o nosso principal objeto de estudo.

1 Limites

1.1 A ideia de limite

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, I um intervalo aberto e $c \in I$ tais que $I - \{c\} \subseteq D$. Diremos que *l é o limite de f(x) quando x tende a c* se para x próximo de c, $f(x)$ está próximo de l.

Observação 1.1. *Note que c pode estar ou não no domínio de f.*

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1.2. *Tomemos $f(x) = x^2$ e $c = 1$.*

Se $x = 1 + \frac{1}{10}$, então $f(x) = f\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2}$.

Se $x = 1 + \frac{1}{100}$, então $f(x) = f\left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{100^2}$.

Em geral, se dermos um pequeno acréscimo δ em c, então $f(c+\delta) = 1 + 2\delta + \delta^2$ ou seja, $f(x)$ fica próximo de 1. Observe que o quão próximo x está de c é diferente do quão próximo $f(x)$ está de 1, mas a medida em que δ vai diminuindo, a diferença $f(c+\delta) - 1$ também vai diminuindo.

Exemplo 1.3. *Considere agora $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ e $c = 1$. Note que 1 não está no domínio de f. Então, $f(1+\delta) = \dfrac{(1+\delta)^2 - 1}{\delta} = 2 + \delta$ e, para δ pequeno, $f(x)$ fica próximo de 2.*

Formalmente a definição de limite é a seguinte:

Definição 1.4. *Diremos que l é o limite de f(x) quando x tende a c se para todo $\varepsilon > 0$ (por menor que seja), existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso escrevemos*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Equivalentemente se para todo $\varepsilon > 0$ (por menor que seja), podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$, então $|f(c + h) - l| < \varepsilon$. Agora escrevemos

$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = l$$

1.2 Funções arbitariamente pequenas

Definição 1.5. *Uma função $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ onde $m > 0$ diz-se arbitariamente pequena (FAP) se*

- *for crescente, isto é, se $\delta_1 < \delta_2$ então $p(\delta_1) \leq p(\delta_2)$ e*
- *para todo todo $\varepsilon > 0$, a inequação $p(x) < \varepsilon$ tem pelo menos uma solução $\delta \in]0, m[$.*

Exemplos de tais funções são:

1. $p(x) = 0$,
2. $p(x) = x$,
3. $p(x) = x^2$,
4. $p(x) = \sqrt{x}$,

   com $x \in]0, m[$ sendo $m > 0$.

Se $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ é uma FAP e $0 < n < m$ então podemos restringir a função p ao intervalo $]0, n]$ desta forma consideraremos também FAPs com domínios $]0, m]$. Se p e q são FAPs com domínios $]0, m_1[$ e $]0, m_2[$ respectivamente, podemos tomar $m = \min\{m_1, m_2\}$ e considerar p e q com domínio comum $]0, m[$. A seguir faremos isto sem menção explícita.

Notemos também que se $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ é uma FAP, então a função $q :]-m, m[- \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $q(\delta) = p(|\delta|)$ é simétrica em relação ao "eixo y".

O teorema seguinte permite uma definição alternativa de limite de função, substituindo o ε e o δ por uma FAP, o que dará um método eficaz para demonstrar e calcular o valor do limite de uma função.

Teorema 1.6. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, I um intervalo aberto e $c \in I$ tais que $I - \{c\} \subseteq D$. Então*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \textit{ se, e somente se } |f(c+h) - l| < p(|h|)$$

para todo h tal que $0 < |h| < m$ e $(c+h) \in D$, onde $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ é uma FAP.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Se $|f(c+h) - l| < p(|h|)$, da definição de FAP podemos escolher $\delta > 0$ tal que $p(\delta) < \varepsilon$. Desta forma se $0 < |h| < \delta$, então como p é crescente, $p(|h|) \le p(\delta)$ e concluímos que $|f(c+h) - l| < p(|h|) \le p(\delta) < \varepsilon$. A recíproca é mais dificil, pois precisamos construir uma FAP. Da definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$, então $|f(c+h) - l| < \varepsilon$. Assim se $\varepsilon = 1$ existe $m > 0$ tal que se $0 < |h| < m$ então $|f(c+h) - l| < 1$. Vamos construir uma FAP $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$. Seja $\delta_1 = m$. Escolhemos $\delta_2 < \frac{1}{2}$ tal que $|f(c+h) - l| < \frac{1}{2}$ desde que $0 < |h| < \delta_2$. Indutivamente, escolhemos $\delta_{n+1} < \min\{\frac{1}{n+1}, \delta_n\}$ tal que $|f(c+h) - l| < \frac{1}{n+1}$ se $0 < |h| < \delta_{n+1}$. Desta forma obtemos uma sequência (δ_n) decrescente com $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ e tal que

$$0 < |h| < \delta_n \to |f(c+h) - l| < \frac{1}{n}$$

Definimos então $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ colocando:

$$p(\delta) = \frac{1}{n} \quad \text{se} \quad \delta_{n+1} \le \delta < \delta_n$$

Claramente p é uma FAP e se $0 < |h| < m$ existe um natural n tal que $\delta_{n+1} \le |h| < \delta_n$. Então,

$$|f(c+h) - l| < \frac{1}{n} = p(|h|)$$

□

Observação 1.7. *Do Teorema 1.6 temos $\lim_{x\to c} f(x) = l \iff |f(c+h) - l| < p(|h|)$. Se $g(h) = f(c+h) - l$ então g é uma translação de f e $|g(0+h) - 0| < p(|h|)$. Assim $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.*

1.3 A álgebra das FAPs

Teorema 1.8. *Sejam $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ e $q :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ FAPs. Então:*

(1) $p+q$ e $p \cdot q$ são FAPs;

(2) Se $f:]0,m[\to \mathbb{R}^+$ é uma função crescente e limitada, então $f \cdot p$ é uma FAP.

(3) Se $f:]0,m[\to \mathbb{R}^+$ é uma função crescente e $0 \leq f(x) \leq p(x)$ para $0 < x < m$, então f é uma FAP.

Demonstração. (1) Como p e q são crescentes e positivas então $p+q$ e $p \cdot q$ são crescentes e positivas. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ as inequações $p(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $q(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ tem respectivas soluções δ_1 e δ_2. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Do fato que p e q são crescentes, vem que $p(\delta) + q(\delta) \leq p(\delta_1) + q(\delta_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Para o produto basta escolhermos soluções das inequações $p(\delta) < \sqrt{\varepsilon}$ e $q(\delta) < \sqrt{\varepsilon}$.

(2) Sendo f e p crescentes e positivas então $f \cdot p$ é crescente e positiva. Como f é limitada seja k tal que $0 \leq f(x) < k$. Se δ é uma solução de $p(\delta) < \frac{\varepsilon}{k}$, então δ é solução $f(\delta) \cdot p(\delta) < \varepsilon$.

(3) Deixamos a demonstração a cargo do leitor. □

Teorema 1.9. *(1) Se $p:]0,m[\to]0,n[$ e $q:]0,n[\to \mathbb{R}^+$ são FAPs, então $q \circ p$ é uma FAP.*

(2) Se $p:]0,m[\to]0,n[$ é uma FAP inversível, então p^{-1} é uma FAP.

Demonstração. (1) Sendo p e q crescentes e positivas então $q \circ p$ é crescente e positiva. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, existe δ_1 tal que $q(\delta_1) < \varepsilon$ e existe δ tal que $p(\delta) < \delta_1$. Como q é crescente, $q(p(\delta)) < q(\delta_1) < \varepsilon$.

(2) Como o domínio de p é positivo, a inversa de p é positiva e claramente crescente. Dado $\varepsilon > 0$ no intervalo $]0,m[$ então $p(\varepsilon)$ está no intervalo $]0,n[$. Escolhemos δ tal que $0 < \delta < p(\varepsilon)$. Desde que p^{-1} é crescente temos $p(\delta) < p^{-1}(p(\varepsilon)) = \varepsilon$. □

Exemplo 1.10. *A única função constante que é uma FAP é a função nula.*

Exemplo 1.11. *$p(x) = x$ para $x > 0$ é claramente uma FAP. Segue do Teorema 1.8 que $p(x) = x^2$, $p(x) = x^3$ e, indutivamente, $p(x) = x^n$ são FAPs. Também do Teorema 1.8 segue que toda função polinomial $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ com os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ todos positivos é uma FAP.*

Exemplo 1.12. *Como consequência do Teorema 1.9, $p(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = \sqrt[3]{x}$ e, em geral, $p(x) = \sqrt[n]{x}$ com $x > 0$ são FAPs.*

Exemplo 1.13. *Se $P(x)$ é um polinômio então $P(c+h) = P(c) + Q(h)$ onde $Q(h)$ é um polinômio na variavel h sem termo constante. Designemos por $|Q|$ o polinômio obtido de Q colocando-se módulo nos seus coeficientes. Então $|P(c+h) - P(c)| \leq |Q|(|h|)$. Do Exemplo 1.11 conclui-se que $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$.*

Exemplo 1.14. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ -1 & se \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Mostremos que não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Supondo l o limite, temos $l - p(|h|) < f(h) < l + p(|h|)$. Assim para $h > 0$ temos $1 - l < p(h)$ e como p é uma FAP, $1 - l \leq 0$. Logo $l \geq 1$. Para $h < 0$ temos $l + 1 < p(|h|)$ e teremos $l + 1 \leq 0$, ou seja $l \leq -1$, o que é impossível.

Teorema 1.15. *Se $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = l_2$ então:*

1. $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$;
2. $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$;
3. $\lim_{x\to c} 1/g(x) = 1/l_2$ *desde que* $l_2 \neq 0$;
4. $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = l_1/l_2$ *desde que* $l_2 \neq 0$.

Demonstração. Da hipótese e do Teorema 1.6 existem FAPs $p :]0, m[\to \mathbb{R}^+$ e $q :]0, m] \to \mathbb{R}^+$ tais que $|f(c+h) - l_1| < p(|h|)$ e $|g(c+h) - l_2| < q(|h|)$ então:

1. $|f(c+h)+g(c+h)-l_1-l_2| = |f(c+h)-l_1+g(c+h)-l_2| \leq |f(c+h)-l_1|+|g(c+h)-l_2| < p(|h|) + q(|h|)$. Como $p + q$ é uma FAP, segue a tese.

2. $|f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| = |f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot g(c+h) + l_1 \cdot g(c+h) + l_1 \cdot l_2| = |(f(c+h)-l_1)\cdot g(c+h)+l_1\cdot(g(c+h)-l_2)| \leq |(f(c+h)-l_1)|\cdot|g(c+h)|+|l_1|\cdot|(g(c+h)-l_2)|$. Da desigualdade $|g(c+h)-l_2| < q(|h|) < q(m)$ concluimos que $|g(c+h)| < |l_2|+q(m)$. Substituindo obtemos $|f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| \leq (|l_2| + q(m)) \cdot p(|h|) + |l_1| \cdot q(|h|)$.

3. $\left|\dfrac{1}{g(c+h)} - \dfrac{1}{l_2}\right| = \dfrac{|g(c+h) - l_2|}{|l_2| \cdot |g(c+h)|}$. Para limitarmos $\dfrac{1}{|g(c+h)|}$ podemos escolher m de forma que $q(m) < |l_2|/2$. Assim, $|g(c+h) - l_2| < q(|h|) < q(m) < |l_2|/2$. De onde concluimos que $|l_2| - |g(c+h)| < |l_2|/2$ ou seja $|g(c+h)| > |l_2|/2$. Assim temos $\left|\dfrac{1}{g(c+h)} - \frac{1}{l_2}\right| = \dfrac{|g(c+h) - l_2|}{|l_2| \cdot |g(c+h)|} < \dfrac{2q(h)}{l_2^2}$.

4. Consequência dos ítens anteriores. $\square$

Teorema 1.16. *(**Conservação do sinal**) Se* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *e* $l > 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $0 < |x - c| < \delta$*.*

Demonstração. Do Teorema 1.6, $l - p(|h|) < f(c+h) < l + p(|h|)$. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $p(\delta) < l/2$. Assim para $0 < |h| < \delta$ temos $l/2 = l - l/2 < l - p(|h|) < f(c+h)$. Portanto, para $0 < |x - c| < \delta$ tem-se que $f(x) > l/2 > 0$. $\square$

Corolário 1.17. *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *e* $l < 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < 0$ *para* $0 < |x - c| < \delta$*.*

Corolário 1.18. *Se* $f(x) > 0$ *para* $0 < |x - c| < \delta$ *e* $\lim_{x\to c} f(x) = l$*, então* $l \geq 0$*.*

Teorema 1.19. *(**Unicidade do limite**) Se* $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ *e* $\lim_{x\to c} f(x) = l_2$ *então* $l_1 = l_2$

Demonstração. Por hipótese, $|f(c+h) - l_1| < p_1(|h|)$ e $|f(c+h) - l_2| < p_2(|h|)$, onde p_1 e p_2 são FAPs. Tomando-se $p = \max\{p_1, p_2\}$, da desigualdade triangular tem-se que $|l_2 - l_1| \leq |l_2 - f(c+h)| + |f(c+h) - l_1| \leq 2 \cdot p(|h|)$. Como p é arbitrariamente pequena, $l_2 = l_1$. $\square$

1.4 Exercícios

1. Se p é uma FAP e $p(h) \geq l$ para $0 < h < m$, então $l \leq 0$.

2. Se p_1 e p_2 são FAPs definidas num intervalo $]0, m[$, então $p = \max\{p_1, p_2\}$ e $q = \min\{p_1, p_2\}$ são FAPs.

3. $\lim_{x\to c} f(x) = l$ se e só se $|f(x) - l| < p(|x - c|)$, onde p é uma FAP.

4. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, então f é limitada num intervalo $]c - m, c + m[$.

5. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to c} g(x) = l_2$ e $l_1 < l_2$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para $0 < |x - c| < \delta$.

6. (**Teorema do confronto**) Sejam I é um intervalo e f, g, h funções definidas em $I - \{c\}$ tais que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{c\}$. Se $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = l$, então $\lim_{x\to c} h(x) = l$.

1.5 Funções contínuas

Definição 1.20. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se contínua em $c \in D$ se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Assim para que f seja contínua em c é necessário que o limite exista em c, c pertença ao domínio de f e além disto o valor do limite seja exatamente $f(c)$. Do teorema 1.14 segue imediatamente o seguinte:

Teorema 1.21. *Se f e g são contínuas em $c \in D$ então:*

1. *$f + g$ é contínua em c.*

2. *$f \cdot g$ é contínua em c.*

3. *$1/g$ é contínua em c , desde que $g(c) \neq 0$.*

4. *f/g é contínua em c , desde que $g(c) \neq 0$.*

Exemplo 1.22. 1. *A função $f(x) = x$ é continua em todo número $c \in \mathbb{R}$ pois $\lim_{x\to c} f(x) = c = f(c)$.*

2. *Segue do Teorema 1.21 que $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ e, indutivamente, $f(x) = x^n$ são funções contínuas em todo seus domínios.*

3. *Segue também do Teorema 1.21 que toda função polinomial $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é contínua em todo seus domínio.*

4. *Mais geralmente se $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde p, q são funções polinomiais é uma função contínua em c desde que $q(c) \neq 0$.*

1.6 Derivadas

Definição 1.23. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, I um intervalo aberto e $c \in I$ tais que $I \subseteq D$. Diremos que f é derivavel em c quando existir o limite $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. O valor deste limite é chamado de derivada de f em c e designado por $f'(c)$. Assim*

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Outra notação para a derivada bastante usada é $\frac{df}{dx}$.

Uma maneira equivalente de definir derivada é a seguinte:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

.

Quando a função f admite derivada em todo $c \in D$ obtemos uma nova função

$$f' : D \to \mathbb{R}$$

chamada de função derivada de f ou simplismente de derivada de f.

A vantagem da segunda maneira de se definir derivada é que podemos calcular $f'(x)$!

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemplo 1.24. *Considere a função $f(x) = x^2$. Então*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = 2c$$

.

$$f'(c) = 2c$$

. *O que é a mesma que $f(x) = 2x$.*

Se utilizarmos a outra definição teremos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 2x$$

Teorema 1.25. *(Continuidade da derivada)*

Se uma função f é derivável em c ela é continua em c.

Demonstração. $\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c}(x - c)\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.f'(c) = 0.$

Disto segue que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Assim f é contínua em c. □

Se f é derivável em c considere a função

$$r(h) = f(c+h) - (f(c) + f'(c)h$$

. Segue imediatamente da definição de derivada que $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. Fazendo a mudança de váriavel $h = x - c$ então

$$r(x-c) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c)$$

onde $\lim_{x\to c} \dfrac{r(x-c)}{x-c} = 0$. Assim a função $y = f(x)$ fica aproximada pela função linear $y = f(c) + f'(c)(x-c)$ no sentido que o "resto" $r(x-c)$ fica pequeno comparado com $x-c$ quando este torna-se pequeno.

Definição 1.26. *A reta cuja equação é $y = f(c) + f'(c)(x-c)$ chama-se Reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Note que esta reta passa pelo ponto $(c, f(c))$ e tem coeficiente angular $m = f'(c)$.*

Após estas considerações com um pouco de trabalho podemos demonstrar o seguinte:

Teorema 1.27. *(Aproximação linear)*

Uma condição necessária e suficiente para que uma função f seja derivável em c é que exista um número m tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$ onde $r(h) = f(c+h) - (f(c) + m.h$. Se este for o caso então $m = f'(c)$.

Teorema 1.28. *(**Regra de derivação**)Sejam f, g funções deriváveis em c. Então $f+g, f-g, f.g, f/g$ desde que $g(c) \neq 0$ são deriváveis em c e temos:*

1. $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$,
2. $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$,
3. $(f.g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$,
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{(f'(c)g(c) - f(c)g'(c))}{g(c)^2}$.