MAT1352 - Cálculo para Funções de uma Variável Real II

Lista 4 – 18/10/2018

Parte 1 - Fórmula de Taylor

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em c dado nos seguintes casos:

   $a)$ $f(x) = senx; \quad c = 0$
   $b)$ $f(x) = cosx; \quad c = 0$
   $c)$ $f(x) = lnx; \quad c = 1$
   $d)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad c = 1$
   $e)$ $f(x) = (1+x)^{\alpha}; \quad c = 0$, onde $\alpha \neq 0$ é um número real dado.

2. Determine a fórmula de Taylor de ordem n em c com resto de Lagrange para as funções do exercício 1.

3. $a)$ Determine o polinômio de Taylor de $f(x) = e^x$, de ordem n, em $c = 0$;

   $b)$ Mostre que, para todo x em $[0, 1]$,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   $c)$ Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

4. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = senx$. Mostre que, para todo x,

$$\left| senx - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}\right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

5. Use o exercício 4 para avaliar $sen1$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que, para todo x,

$$senx = \lim_{n\to\infty}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

ou

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

7. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   $a)$ Mostre que $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ é o polinômio de Taylor, de ordem 10, de f em $c = 0$ sem calcular as derivadas.(Use a fórmula da soma de uma P.G).

   $b)$ Observando o polinômio do item (a), calcule $f^{'}(0)$, $f^{''}(0)$, $f^{'''}(0)$, etc.

8. Se $p(x)$ é um polinômio de grau n mostre que

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c)\ldots + \frac{p^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

   onde $c, x \in \mathbb{R}$.

9. Mostre que o polinômio de Taylor da derivada f' de uma função f é a derivada do polinômio de Taylor de f.

10. Se $P_{n,c}$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função f então o polinônio de Taylor de ordem $n+1$ de $g(x) = \int_c^x f(t)dt$ é a integral $\int_c^x P_{n,c}(t)dt$.

11. Mostre que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

12. Se $g(x) = f(x-c)$ e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de f na origem então $P_n(x-c)$ é o polinômio de g com centro em c .

Parte 2 - Equações Diferenciais e Aplicações

1. Resolva as equações:

   $a)\ y' = e^{x-2y}$

   $b)\ (senx)y' + (cosx)y = 1$

   $c)\ y' = x^3 - 2xy$

2. Encontre as soluções que verificam a condição inicial dada:

   $a)\ y' = x + y;\quad y(0) = 1$

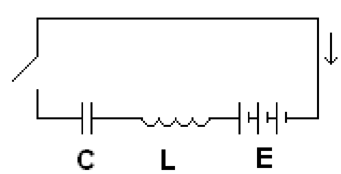
   $b)\ y' = x(y+1);\quad y(0) = -1$

3. Determine as soluções constantes da equação

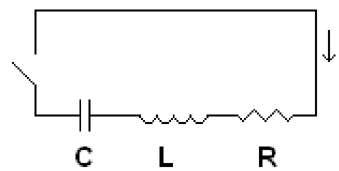
$$\frac{dx}{dt} = 9 - x^2$$

   e faça um esboço das soluções.

4. Determine a corrente I em função do tempo no circuito LC, onde $L = 10henry$, $C = 0,05farad$, $E = 120V$ e a carga no capacitor é nula no instante inicial.



5. Num circuito RLC, carrega-se o capacitor com uma carga de 2 coulombs. Qual a corrente no circuito depois de ligada a chave, sabendo-se que $R = 20$ ohms, $L = 10$ henrys e $C = 0,05$ farad?



6. A lei do resfriamento de Newton diz que: "*A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente*". Uma latinha de cerveja inicialmente 20^oC é colocada em um refrigerador cuja temperatura é de -10^oC. Sabendo-se que depois de 1 minuto a temperatura da cerveja é 18^oC depois de quanto tempo estará a 0^oC ?

7. A população de uma cidade é de 1.000.000 habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu o vírus. Em 7 dias, esta porcentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos sãos e enfermos, sendo a taxa de variação na porcentagem de enfermos proporcional ao número de contatos e este, proporcional ao produto das porcentagens de sãos e enfermos. Supondo a população fixada, pergunta-se: após quanto tempo os enfermos serão 50% da população?

8. Uma bola de naftalina esférica perde massa a uma razão que é proporcional à sua área total. Se ela perde metade de massa em 75 dias, quanto tempo levará para desaparecer completamente?

9. Determine a velocidade que um projetil deve ser lançado na direção radial de forma que ele não retorme mais a Terra.

10. Suponha que uma sala contendo inicialmente $60m^3$ de ar esteja inicialmente livre de monóxido de carbono. Começa-se a fumar cigarros e o ar expelido a uma taxa de $0,003m^3/min$ contém 4% de monóxido de carbono. A mistura homogeneizada deixa a sala na mesma taxa.

a) Encontre a porcentagem em volume do monóxido de carbono em um instante qualquer t.

b) Uma exposição prolongada ao monóxido de carbono à uma porcentagem de $0,012$ é prejudicial ao organismo humano. Depois de quanto tempo é atingida esta concentração na sala?

11. Um recipiente contém um volume V (em litros) de uma solução salina, sendo a massa de sal dissolvida igual a m_0 quilogramas no instante inicial. Uma outra solução de concentração k (em kg/l) penetra no recipiente a uma razão constante de r litros por minuto. A solução se mantém perfeitamente misturada no recipiente, de onde sai à razão de r litros por minuto. Seja $x(t)$ a concentração da solução no recipiente no instante t.

a) Determine a equação diferencial que admite $x(t)$ como solução.

b) Resolva a equação obtida no item (a).

c) Usando o item (b), determine em que condições $x(t)$ é crescente e em que condições $x(t)$ é

decrescente. Interprete os resultados.

d) Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Interprete o resultado.