# MAT01352 - Cálculo para Funções de uma Variável Real II

**Lista 3 – 13/09/2018**

## Parte 1 - Integrais Impróprias

1. Verifique se as seguintes integrais divergem ou convergem. Neste caso determine seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{onde} \quad a > 1$

   (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{onde} \quad p > 0$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3}} dx$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

   (g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^3 - 5x^2} dx$

   (h) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx$

2. Demonstrar que a integral de Euler de 1ª espécie

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

   é convergente se $p > 0$ e $q > 0$.

3. (a) Mostre que a integral de Euler de 2ª espécie (Função Gama)

$$\Gamma(\alpha) \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

   é convergente se $\alpha > 0$.

(b) Use integração por partes para mostrar que se $n$ é um número natural então $n! = \Gamma(n+1)$

4. Prove que a integral de Dirichlet

$$I = \int_0^\infty (\operatorname{sen} x/x)dx$$

converge, mas não é absolutamente convergente.

5. Determine se as seguintes integrais convergem ou não usando integração por partes:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx \quad \text{onde} \quad a > 0$

## Parte 2 - Aplicações do Cálculo

1. Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo $x$ a região limitada pelas funções $y = x^2 - 4x + 5$ e $y = -x^2 + 6x - 3$.

2. Gire a região do exercício 1 em torno do eixo $y$ e encontre seu volume.

3. Um sólido tem como base a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e cada secção ortogonal ao semi eixo maior é um semi círculo. Ache seu volume.

4. Considere a região limitada pela hipérbole $y = 1/ax$ e pelas retas $x = 1/a$ e $x = a$ para $a \geq 1$. Para que valor de $a$ o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo $x$ é máximo?

5. Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo $x$ a região limitada por $y = (x-2)^2$ e $y = (x-2)^2/2 + 2$.

6. Encontre o volume do sólido obtido pela intersecção do cilindro $y^2 + z^2 = R^2$ com o cilindro $x^2 + z^2 = R^2$

7. Determine o comprimento das curvas:

   (a) $y = x^4/4 + 1/8x^2$ onde $1 \leq x \leq 3$
   (b) $y = \ln(\cos x)$ para $0 \leq x \leq \pi/4$
   (c) $y = x^{n+1}/(n+1) \ + \ 1/4(n-1)x^{n-1}$ para $a \leq x \leq b$ onde $a > 0$
   (d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

8. Determine a área da superfície de revolução girando-se as curvas abaixo em torno do eixo indicado:

   (a) $y = x^3$ onde $0 \leq x \leq a$ e eixo $x$
   (b) $y = x^2$ onde $0 \leq x \leq 2$ e eixo $y$
   (c) $y = \sqrt{x}$ onde $1 \leq x \leq a$ e eixo $x$
   (d) $y = x^4/4 + 1/8x^2$ onde $1 \leq x \leq 2$ e eixo $y$

9. Sejam $a < b$. Calcule o centro de massa do semi-anel limitado pelas circunferências:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad e \quad x^2 + y^2 = b^2$$

10. Mostre, usando centro de massa, que as medianas de um triângulo se interceptam num ponto e este divide cada uma delas na razão de 2 : 1.

11. Determine o centro de massa da região limitada pelas parábolas:

$$y = \frac{x^2}{4} \quad e \quad x = \frac{y^2}{4}$$

12. Determine o centro de massa do arco da parábola:

$$y = x^2; \quad -a \leq x \leq a$$

13. Determine o centro de massa de um setor circular de raio $R$ e ângulo $\alpha$.

14. Respostas : 1) $63\pi$ , 2) $45\pi$ , 3) $4\pi/3$ , 4) $\sqrt{3}$ , 5) $256\pi/15$ , 8) $(x_c, y_c) = \frac{4\pi(b^3-a^3)}{3(b^2-a^2)}$ , 10) $(x_c, y_c) = (9/5, 9/5)$ , 11) $(x_c, y_c) = (\frac{4R\sin(\alpha/2)}{3\alpha}, 0)$