

MAT01352 - Cálculo para Funções de uma Variável Real II

Lista 2 – 10/08/2018

Parte 1 - Integrais

1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Seja P_n a partição que divide o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais. Mostre que $S(f, P_n) - s(f, P_n) = (f(b) - f(a))(b - a)/n$ e conclua disto que f é integrável.
2. Considere a função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Seja P_n a partição do intervalo $[0, 2]$ em n partes iguais.

- a) Calcule $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ para $n = 4, 5, 6, 7$;
 - b) Dê uma expressão para $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ para $n = 2k$ e $n = 2k + 1$ (n par ou ímpar);
 - c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n)$.
3. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n} \\ 2, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que f é integrável e calcule sua integral.

4. Usando as propriedades da integral mostre que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma função crescente.

6. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

(1) Faça um gráfico de f ;

(2) Encontre a função $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, $t \in [0, 2]$;

(3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

c) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

7. Calcule a área da região

a) limitada pela reta $y = 2x + 1$ e pela curva $y = x^2$;

b) limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;

c) limitada pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ e por $x = 2$;

d) limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

8. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

9. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

10. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2 \int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

11. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

a) Se f e g são contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

b) $\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$

c) Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = \ln(|\sec(x)|)$.

12. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_0^{1+x^2} 1/(2 + \sin t) dt$$

13. $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \sin(\pi x)$, onde f é contínua, determine $f(4)$.

14. Ache uma função contínua f tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = \sin x - x \cos x - x^2/2$$

15. Seja f uma função derivável e inversível definida no intervalo $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a)$$

16. Determine os pontos de máximos e os de mínimos, se houver, da função

$$f(x) = \int_x^{x+1} 1/(1 + t^2) dt$$

17. Se $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ use integração por partes para exprimir a integral $\int_0^x f(x)dx$ em termos de f . Calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

18. Se $f(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^x \text{sen } t^2 dt$ exprima a integral $\int_0^x f(x)dx$ em termos de f . Calcule $\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)dx$.

19. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_{x^3}^{\pi} \frac{1}{1+t^2+\text{sen}^2 t} dt$$

e determine $f^{-1}(0)$.

20. Derive as seguintes funções:

(a) $g(x) = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+t^2+\text{sen}^2 t} dt$

(b) $h(x) = \text{sen} \left(\int_0^{2x} \text{sen} \left(\int_0^y \text{sen}^3 t dt \right) dy \right)$.

21. Seja $f : [0, b] \rightarrow [0, d]$ uma função contínua e inversível e $h : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

22. Mostre através de uma integração por partes que

$$\int_0^b \left(\int_0^{f(x)} h(y) dy \right) dx = \int_0^d (b - f^{-1}(y)) h(y) dy$$

23. Respostas: $6a = 8\sqrt{2}/3$, $6b = 8/3$, $6c = 1/12$, $6d = 1$, $10a = F$, $10b = V$, $10c = V$, 11) $f'(x) = \frac{2x}{2 + \sin(1+x^2)}$, 12) $f(4) = \pi/2$, 13) $f(x) = \sin x - 1$, 15) $x = -1/2$ ponto de máximo. Não tem ponto de mínimo. , 16) $1/2e - 1$, 17) 0 , 20) $f^{-1}(0) = \sqrt[3]{\pi}$

Parte 2 - Cálculo com Integrais

(a) Calcule as integrais abaixo:

$$1) \int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$2) \int \cos(7x) dx$$

$$3) \int \frac{7}{x-2} dx$$

$$4) \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$5) \int 2x(x+1)^{2010} dx$$

$$6) \int x^2 e^x dx$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0$$

$$8) \int \sec^3 x dx$$

$$9) \int x^5 e^{-x^3} dx$$

$$10) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$11) \int e^{2x} dx$$

$$12) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$13) \int \operatorname{tg} x dx$$

$$14) \int e^x \cos x dx$$

$$15) \int x^r \ln x dx, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$16) \int \cos^3 x dx$$

$$17) \int x e^{-x} dx$$

$$18) \int \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$$

$$19) \int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$$

$$20) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 2}} dx$$

(b) Calcule as integrais abaixo:

$$1) \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\operatorname{cos} x}} dx$$

$$3) \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$$

$$7) \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$$

$$9) \int \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$11) \int \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x-1)^2(x-2)} dx$$

$$13) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$15) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} dx$$

$$19) \int \frac{x}{x^2-4} dx$$

$$21) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$23) \int \frac{4x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 2x + 2)(x + 1)} dx$$

$$2) \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$4) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$6) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{cos}^2 x} dx$$

$$8) \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx$$

$$10) \int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx$$

$$12) \int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx$$

$$14) \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$16) \int a^x dx, \quad a > 0$$

$$18) \int \operatorname{sen}(\ln x) dx$$

$$20) \int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$$

$$22) \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx$$

$$24) \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} dx$$