MAT1352 - Cálculo para Funções de uma Variável Real II

Lista 1 – 01/08/2018

Parte 1 - Sequências

1. Verifique quais das sequências abaixo são crescentes e limitadas superiormente ou decrescentes e limitadas inferiormente. Nestes casos determine seu limite:

   (a) $s_n = (1+n)/n$

   (b) $s_n = (n-1)/n$

   (c) $s_n = (1+n)/n^2$

   (d) $s_n = \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

   (e) $s_n = (-1)^n/(n+1)$

   (f) $s_n = n^2/(n+1)$

   (g) $s_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{0}{2^4} + \ldots + \dfrac{?}{2^n}$

   (h) $s_n = n/(n^2+1)$

   (i) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ ou indutivamente

   $$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2+s_n}$$

   (j) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ ou indutivamente

   $$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$$

2. Se $a > 0$ mostre que a sequência

   $$x_0 = a \ \text{ e } \ x_{n+1} = \frac{(x_n + \frac{a}{x_n})}{2}$$

   é decrescente e limitada inferiormente. Determine seu limite.

3. Mostre que a sequência

   $$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

é crescente e use o fato que $1/n! < 1/2^{n-1}$ para mostrar que $s_n < 3$. Do axioma da completude conclua que existe o número

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n$$

4. Seja p_n o perímetro do polígono regular com 2^n lados inscrito na circunferência de raio unitário. Se l_n é seu lado então, $p_n = 2^n l_n$. Mostre que (p_n) é uma sequência crescente a partir de $p_2 = 4\sqrt{2}$ e limitada superiormente. Do axioma da completude conclua que existe o número π tal que

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} p_n$$

Parte 2 - Completude

1. Para os conjuntos A abaixo determine, quando houver, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$:

   (a) $A = [a, b]$ onde $a < b$

   (b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 1011, 13\}$

   (c) $A =]a, b[$ onde $a < b$

   (d) $A = \left\{\frac{p}{q} \mid \ , \ 0 < p < q \ , \ \mathrm{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < 1011, 13\right\}$

   (e) $A = \left\{\frac{p}{q} \mid \ , \ 0 < p < q \ , \ \mathrm{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < n\right\}$

   (f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$

   (g) $A = \left\{e^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0\right\}$

   (h) $A = \left\{\cos\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0\right\}$

   (i) $A = \{f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0\}$ onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente

   (j) $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente

2. sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos limitados e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Mostre as seguintes propriedades do supremo e do ínfimo:

   (a) Se $A \subset B$ então $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$,

   (b) Se $A \leq B$ então $\sup A \leq \inf B$,

   (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,

(d) Se $c > 0$ então $\sup c.A = c.\sup A$ e $\inf c.A = c.\inf A$,

(e) Se $c < 0$ então $\sup c.A = c.\inf A$ e $\inf c.A = c.\sup A$,

(f) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$,

(g) Se $c > 0$ então $\sup(c.f) = c.\sup f$ e $\inf(c.f) = c.\inf f$,

(h) Se $c < 0$ então $\sup(c.f) = c.\inf f$ e $\inf(c.f) = c.\sup f$,

(i) Dê exemplo de funções tais que $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$.