MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 4 - 28/10/2016

(1) Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ onde M é uma variedade diferenciável é uma derivação no espaço das funções $E^0(M)$.

(a) Mostre que se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então $X \circ Y - Y \circ X$ é uma derivação e portanto determina um campo de vetores $[X, Y]$ tal que

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

$[X, Y]$ é chamado o *O Colchete de Lie* de X com Y.

(b) Mostre que o Colchete de Lie tem as seguintes propriedades:

i. $[,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é bilinear e anti-simétrica.

ii. $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ (Identidade de Jacobi)
O colchete de Lie com estas propriedades expressam que o conjunto dos campos de vetores é uma *Álgebra de Lie*.

(2) Seja $\omega \in E^1(M)$ e X, Y campos de vetores sôbre M. Então

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

(3) Utilize o exercício anterior para mostar que

$$(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

(4) Mostre que as isometrias do $\mathbb{R}^3$ são dadas por $f(x) = A(x) + b$ onde $A \in O(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$.

(5) Mostre que as isometrias do $\mathbb{R}^2$ são dadas por $f(x) = A(x) + b$ onde $A \in O(2)$ e $b \in \mathbb{R}^2$.

(6) Mostre que as isometrias da esfera $S^2(R)$ são obtidas restringindo as isometrias $A \in O(3)$ do $\mathbb{R}^3$ à esfera $S^2(R)$.

(7) Considere no $\mathbb{R}^3$ a folha do hiperboloide $H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$.

(a) Dado um ponto $p = (x, y, z) \in H$, seja $(u, v, 0)$ o ponto onde a reta que passa por p e pelo ponto $(0, 0, -1)$ encontra o plano xy. Defina a função φ por $\varphi(u, v) = (x, y, z)$. Verifique que o domínio de φ é o disco unitário aberto e determine em coordenadas a função $\varphi(u, v) = (x, y, z)$.

(b) Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido da métrica de Lorentz $g(u, u) = dx(u)^2 + dy(u)^2 - dz(u)^2$. Calcule $h = \varphi^* g$.

(c) A inversão no circulo de centro O e raio R é a transformação σ que a cada ponto P do plano diferente de O associa o ponto Q na semireta $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R^2$. Determine a expressão de σ num sistema de coordenadas com origem no ponto O.

(d) Sejam C o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ e σ a inversão neste círculo. Mostre que a imagem do círculo $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ é o semiplano $y \geq 2$ e calcule $\sigma^* h$ onde h é a métrica encontrada no item b transladada para o círculo $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

(e) Mostre que a equação de uma circunferência ou de uma reta em coordenadas complexa é $az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$ onde $a, c \in \mathbb{R}$ e a inversão σ na circunferência unitária é dada por $\sigma(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Utilize isto para mostrar que a imagem de uma circunferência ou uma reta por σ é uma circunferência ou uma reta.

(8) Seja D^2 o *disco de Poincaré* com a métrica

$$g = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

(a) Mostre que a métrica g é dada em coordenadas complexas por

$$g = \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2}(dzd\bar{z}).$$

(b) Mostre que a inversão na circunferência com centro no ponto $(a, 0)$ ortogonal ao bordo do círculo D^2 é dada por $\sigma(z) = \dfrac{a\bar{z} - 1}{\bar{z} - a}$. Mostre também que σ é uma isometria do disco. (Note que $|a| > 1$).

(c) Substituindo a por $1/a$, uma inversão numa circunferência com centro no eixo x é dada por $\sigma_a(z) = \dfrac{\bar{z} - a}{a\bar{z} - 1}$ onde $|a| < 1$. Observe que para $a = 0$ temos a reflexão no eixo y. $(1/a = \infty)$. Mostre que

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \frac{z+c}{cz+1}$$

onde $c = \dfrac{b-a}{1-ab}$.

(d) Defina $\tau_c(z) = \dfrac{z+c}{cz+1}$ para $|c| < 1$. Mostre que $\tau_a \circ \tau_b = \dfrac{z+e}{ez+1}$ onde $e = \dfrac{a+b}{1+ab}$.

(e) Defina no intervalo $I =]-1,1[$ a operação

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Mostre que I com esta operação é um grupo abeliano e que $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to I$ é um isomorfismo de grupos.

(f) Mostre que o grupo de isometrias do disco de Poincaré é formado das transformações da forma

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z+c}{cz+1}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $c \in D^2$.

(9) Mostre que o grupo de isometrias do hiperboloide H é o subgrupo $G \subset O(2,1)$ que fixa H^2.

(10) Seja S uma superfície compacta triangulada, F o número de faces da triangulação, A o número de arestas e V o número de vértices. A característica de *Euler-Poincaré* de S é definida por

$$\chi(S) = V - A + F$$

(a) Projete o bordo do cubo I^3 sôbre a esfera S^2 para obter uma triangulação e conclua que $\chi(S^2) = 2$.

(b) Determine uma triangulação do toro $T^2 = S^1 \times S^1$ e calcule $\chi(T^2)$.

(11) (a) Ortonormalize os campos coordenados esféricos para obter um referencial móvel no aberto $U = \{(\theta, \varphi, r) : \theta \in \mathbb{R},\ \varphi \in]0,\pi[,\ r > 0\}$ e, a seguir, determine o referencial dual e as formas de conexão.

(b) Restrinja o referencial esférico à esfera $S^2(r)$ para obter um referencial móvel sobre ela. Escreva, neste referencial, a métrica e a segunda forma fundamental e calcule as curvaturas principais, média e gaussiana.

(12) Se g_1 e g_2 são métricas sobre uma superfície S, mostre que $ag_1 + bg_2$ onde $a, b > 0$ também é uma métrica sobre S.

(13) Seja $f(\theta, \varphi) = (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ parametrizando o toro $T^2 \subset \mathbb{R}^4$. Mostre que a métrica induzida é dada por $g = d\theta^2 + d\varphi^2$ e calcule sua curvatura.

(14) Calcule a curvatura gaussiana do plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$.

(15) Considere no semi-plano $S = \{(u, v) : \ u > 0\}$ a métrica

$$g = du^2 + u^2 dv^2$$

.

Mostre que $K = 0$ e determine coordenadas (x, y) tal que $g = dx^2 + dy^2$. Voce consegue identificar esta situação com uma mudança de coordenadas conhecida?

(16) Seja M uma superfície riemanniana e G um grupo de isometrias de M operando descontinuamente em M. Considere a métrica em $S = M/G$ tal que a projeção $\pi : M \to S = M/G$ seja uma isometria local. Mostre que se $c : I \to M$ é uma geodésica então $\gamma = \pi \circ c$ é uma geodésica de S.

(17) Mostre que as geodésicas da esfera são os grandes círculos e descreva as geodésicas do plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(18) Seja f uma isometria de uma superfície S e $p \in S$. Se $f(p) = p$ e $df_p = Id$ use o fato que f leva geodésicas em geodésicas para mostrar que $f = Id$.

(19) Seja S uma superfície riemanniana que admite um sistema de coordenadas (x, y) tal que a métrica é dada por

$$g = Edx^2 + Gdy^2$$

onde E, G são funções diferenciáveis e positivas. Mostre que

$$K = -\frac{1}{EG}\left(\left(\frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{E}}\right)_x + \left(\frac{(\sqrt{E})_y}{\sqrt{G}}\right)_y\right)$$

(20) Sejam S uma superfície riemanniana orientada e Φ o seu atlas. Seja Φ^ω o sub-atlas formado das cartas $\varphi(p) = (x(p), y(p))$ tais que a métrica exprime-se na forma

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) \quad (\textit{coordenadas conformes})$$

Mostre que as mudanças de coordenadas são holomorfas, isto é verificam as equações de Cauchy-Riemann.

(21) Determine a característica de Euler-Poincaré da superfície

$$S = \{p \in \mathbb{R}^3 : x^2(p) + y^4(p) + z^6(p) = 1\}$$

(22) Seja S uma superfície riemanniana compacta, conexa e orientável. Mostre que:

(a) se $K = 0$, então S é homeomorfa ao toro T^2;

(b) se $K > 0$, então S é homeomorfa à esfera S^2.

(23) Seja S uma superfície riemanniana orientada com curvatura $K \leq 0$. Mostre que duas geodésicas c_1 e c_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar num outro ponto q de S de forma que elas limitem uma região cujo bordo é constituído por elas.

(24) Uma *região poligonal* de uma superfície S é um subconjunto $\mathcal{P} \subset S$ homeomorfo a uma região poligonal do plano cujo bordo $\partial\mathcal{P}$ é uma curva suave por partes. Diremos que $\mathcal{P}$ é um *polígono geodésico* se seu bordo é constituído por segmentos de geodésicas. Mostre que se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são os ângulos internos do polígono, então

$$\sum \alpha_i = (n-2)\pi + \int_{\mathcal{P}} K dA$$

(25) Seja S uma superfície orientada, conexa e compacta. Se existe sobre S um campo de vetores que nunca se anula, então $\chi(S) = 0$.

(26) Mostre que as geodésicas do disco de Poincaré são dadas pelos arcos das circunferências ortogonais ao bordo, os quais estão no interior do disco.

(27) Se T é um triângulo geodésico no disco de Poincaré, então $A(T) = \pi - \Sigma\alpha_i$ onde $A(T)$ é a área e α_i são os ângulos internos do triângulo.