MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 3 - 04/10/2016

1. Seja ω uma 1-forma definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

   (a) Se ω é exata para todo 1-caminho $c : [a, b] \to U$ fechado temos $\int_c \omega = 0$.

   (b) Mostre a recíproca.

2. Considere a forma diferencial definida no aberto $\mathbb{R}^3 - 0$:

$$\omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

   (a) Se $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ escreva ω em termos de dr e r.

   (b) Mostre que $d\omega = 0$.

   (c) Determine uma primitiva de ω.

   (d) O campo de vetores E tal que $\omega = \omega_E$ é o campo elétrico de uma carga localizada na origem. Determine a função potencial.

3. Seja ω a 1-forma definida no aberto $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ dada por

$$\omega = \frac{2I}{c}\left(\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}\right)$$

   onde I, c são constantes.

   (a) Mostre que ω é fechada mas não é exata.

   (b) Seja B o campo de vetores tal que $\omega = \omega_B$. Mostre que $\operatorname{rot} B = 0$.
   B é o campo magnético de um fio infinito colocado no eixo z por onde passa uma corrente de intensidade I.

4. Seja c um 2-caminho no $\mathbb{R}^2$. Deduza o teorema de Green

$$\int_{\partial c} Pdx + Qdy = \int_c (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$$

aplicando o teorema de Gauss do divergente para uma conveniente forma sôbre o cilindro com base c e altura 1.

5. Calcule

$$\int\int_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\ dA$$

onde S é o elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6. Calcule

$$\int\int_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

7. Seja c um 3-caminho no $\mathbb{R}^3$, D a imagem de c e η a 2-forma

$$\eta = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

Mostre que o volume de D é dado por

$$\text{vol}(D) = 1/3 \int_{\partial c} \eta$$

como um caso particular conclua que

$$\text{vol}(B^3(r)) = \frac{r}{3}\,\mathrm{A}(S^2(r))$$

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciavel e $N(x) = x$ o campo normal a esfera S^2. Se $\langle \nabla_x f, N(x) \rangle > 0$ mostre que existe p no interior da esfera tal que $\nabla_p f = 0$.

9. Seja S uma superfície compacta orientada por uma 2-forma η.

   (a) Se ω é uma 1-forma sôbre S, mostre que existe um ponto $p \in S$ tal que $d\omega_p = 0$.

   (b) Conclua que η não é exata e portanto $H^2(S) \neq \{0\}$.

10. Sejam $\tilde{M}$ e M variedades diferenciáveis conexas. Uma aplicação $p : \tilde{M} \to M$ é dita *de recobrimento diferenciável* se

    (i) é diferenciável e

    (ii) todo $x \in M$ admite uma vizinhança aberta V tal que $p^{-1}(V) = \bigcup \tilde{V}_i$, onde os $\tilde{V}_i$ são abertos dois a dois disjuntos e $p : \tilde{V}_i \to V$ é um difeomorfismo.

    A vizinhança V é chamada de *vizinhança distinguida* e $(\tilde{M}, p)$ de *recobrimento* de M.

11. (a) Mostre que a aplicação $e : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $e(\theta) = e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ é uma aplicação de recobrimento.

    (b) Se $c : [a, b] \to S^1$ é suave por partes e θ_0 é tal que $e(\theta_0) = c(a)$, mostre que existe uma única função diferenciável por partes $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

       i. $\theta(a) = \theta_0$

       ii. $c(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$

12. Uma *ação* (ou operação) de um grupo G sôbre uma variedade M é uma aplicação $\mu : G \times M \to M$ tal que as aplicações $\mu_g : M \to M$ definidas por $\mu_g(p) = \mu(g, p)$ são diferenciaveis e verificam as seguintes propriedades:

    (a) $\mu_g \circ \mu_h = \mu_{gh}$

    (b) $\mu_e = I$ (e identidade do grupo)

       i. Mostre que $\mu_{g^{-1}} = \mu_g^{-1}$ e portanto μ_g é um difeomorfismo.

       ii. Se G está munido da topologia discreta então μ é continua.

    A seguir vamos simplificar a notação colocando $g.p = \mu(g, p) = \mu_g(p)$

13. Dizemos que G *opera descontinuamente* em M se todo ponto p de M admite uma vizinhança V tal que $g.V \cap V = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Uma tal vizinhança será chamada de *Vizinhança Fundamental*.

    (a) Se $G_p = \{g : g \cdot p = p$ é a isotropia em p, mostre que $G_p = \{e\}$.

    (b) A aplicação $G :\to G \cdot p$, $g \to g \cdot p$ é injetora.

    (c) Mostre que G é enumeravel. (Lembre que M tem base enumeravel)

    Mostre que se G opera descontinuamente em M, então $\pi : M \to M/G$ é uma aplicação de recobrimento.

    (a) Considere uma ação descontinua de G sobre M. Defina a relação de equivalência:

    $$p \sim q \Longleftrightarrow \text{ existe } g \in G \text{ tal que } q = g \cdot p.$$

    Seja $[p]$ a classe de equivalência de p. Então $[p] = G \cdot p$ é chamada de órbita do ponto p. Designemos por M/G o espaço quociente munido da topologia quociente e por $\pi : M \to M/G$ a projeção.

    i. Mostre que se V é uma vizinhança fundamental então $\pi|_V : V \to [V]$ é um homeomorfismo e $\pi^{-1}([V]) = \bigcup_{g \in G} gV$.

    ii. Sendo Φ o atlas de M defina $\widetilde{\Phi}$ como a coleção das aplicações $\varphi \circ (\pi|_V)^{-1}$ onde $\varphi \in \Phi$ e $Dom(\varphi) = V$ é uma vizinhança fundamental. Mostre que $\widetilde{\Phi}$ define um atlas sobre M/G.

    (b) Prove que M/G é orientável se e só se M é orientável as aplicações μ_g preservam a orientação de M.

    (c) O grupo $\mathbb{Z}$ opera no $\mathbb{R}^2$ pela ação $n \cdot (x, y) = (x + n, y)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} = S^1 \times \mathbb{R}$.

    (d) O grupo $\mathbb{Z}$ opera no $\mathbb{R}^2$ pela ação $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1^n)y)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} =$ faixa de Moebius infinita.

    (e) O grupo $\mathbb{Z}_2$ opera no $\mathbb{R}^3$ pela ação $1 \cdot p = p, (-1) \cdot p = -p$. Note que a isotropia na origem é todo o grupo e portanto a ação não é descontinua mas a restrição da ação a $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ o é. Seja $S \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ uma superfície simétrica em relação a origem, isto é invariante pela ação. Então $\mathbb{Z}_2$ opera descontinuamente em S e podemos considerar a superfície $S/\mathbb{Z}_2$. Vejamos alguns casos:

i. Mostre que $S^2/\mathbb{Z}_2 = P^2(\mathbb{R})$.

ii. Se $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\ ,\ |z| < 1\}$ é o cilindro então $S/\mathbb{Z}_2$ é a faixa de Moebius.

iii. Se S é o toro obtido girando a circunferência $(x - 2)^2 + z^2 = 1\ ,\ y = 0$ em torno do eixo z então $S/\mathbb{Z}_2$ é a garrafa de Klein.

14. Seja $S^n(r)$ a esfera de raio r no $\mathbb{R}^{n+1}$, $N = (0, 0, \ldots, 1)$ e $S = (0, 0, \ldots, -1)$ o polo norte e o polo sul respectivamente.

    (a) Determine φ_n e φ_s as projeções estereográficas a partir do polo norte e sul respectivamente.

    (b) Mostre que $(\varphi_s)^{-1} \circ \varphi_n : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ é a inversão na esfera $S^{n-1}(r)$.

15. Generalize para $P^n(\mathbb{R})$ a estrutura de variedade dada em coordenadas não homogeneas análogo ao $P^2(\mathbb{R})$.