

MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 1 – 03/08/2016

- (1) Mostre que as funções coordenadas (x^i) relativas a uma base (e_i) de um espaço vetorial V de dimensão n formam uma base de V^* .
- (2) Se S é um subespaço de dimensão $n - 1$ de um espaço vetorial V de dimensão n , então o seu anulador S^0 é um subespaço de V^* de dimensão 1.
- (3) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada $a \in V$, defina a forma linear ω_a por $\omega_a(v) = \langle a, v \rangle$. Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned}\omega : V &\rightarrow V^* \\ a &\mapsto \omega_a\end{aligned}$$

é um isomorfismo.

- (4) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que:
 - (a) $\langle \omega_a, \omega_b \rangle = \langle a, b \rangle$ define um produto interno em V^* ;
 - (b) se (e_i) é uma base ortonormal de V , então sua base dual (x^i) é uma base ortonormal de V^* .
- (5) Considere a função polinomial $\phi(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i < j} (X_i - X_j)$. Se $\sigma \in S_n$ defina $\sigma\phi$ por

$$(\sigma\phi)(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i < j} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})$$

e ϵ_σ por $\sigma\phi = \epsilon_\sigma\phi$. Mostre que:

- (a) $\epsilon : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ é um homomorfismo de grupos.
 - (b) $A_n = \{\sigma \in S_n : \epsilon_\sigma = 1\}$ é um subgrupo normal de S_n .
- (6) Seja $\varphi : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ uma função k -linear. Mostre que:

(a) φ é alternada se, e só se,

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k);$$

(b) φ é simétrica se, e só se,

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

(7) Sejam Δ a função determinante usual do \mathbb{R}^3 , (x^1, x^2, x^3) a base dual da base canônica, $a = (1, 1, 1)$ e $b = (1, -1, 1)$.

(a) Escreva $\omega(v) = \Delta(a, b, v)$ na base (x^1, x^2, x^3) .

(b) Escreva $\eta(u, v) = \Delta(a, u, v)$ na base $(x^1 \wedge x^2, x^2 \wedge x^3, x^3 \wedge x^1)$.

(c) Escreva Δ na base $x^1 \wedge x^2 \wedge x^3$.

(8) Sejam ω, η, φ as formas no \mathbb{R}^3 dadas por $\omega = -bx^1 + ax^2$, $\eta = cx^1 \wedge x^3 + dx^2 \wedge x^3$ e $\varphi = x^1 + x^2 + x^3$. Calcule $\omega \wedge \eta$, $\eta \wedge \eta$, $\omega \wedge \varphi$.

(9) Sejam ω e η formas de graus pares. Mostre que $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$.

(10) Se ω é uma forma de grau ímpar então $\omega \wedge \omega = 0$.

(11) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x^1, x^2, x^3) = (y^1, y^2, y^3)$ onde $y^1 = x^1 + x^2 + x^3$, $y^2 = x^2 + x^3$ e $y^3 = x^3$.

(a) Se $\omega = y^1 + y^2$ calcule $T^*\omega$.

(b) Se $\eta = y^1 \wedge y^2 + y^2 \wedge y^3 + y^3 \wedge y^1$ calcule $T^*\eta$.

(c) Se $\Delta = y^1 \wedge y^2 \wedge y^3$ calcule $T^*\Delta$.

(12) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x^1, x^2) = (y^1, y^2, y^3)$ onde $y^1 = x^1 + x^2$, $y^2 = x^2 - x^1$ e $y^3 = x^2 + 2x^1$.

(a) Se $\omega = y^1 + y^2$ calcule $T^*\omega$.

(b) Se $\eta = y^1 \wedge y^2 + y^2 \wedge y^3 + y^3 \wedge y^1$ calcule $T^*\eta$.

(c) Se $\Delta = y^1 \wedge y^2 \wedge y^3$ calcule $T^*\Delta$.

- (13) Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x) = (y^1, y^2, y^3)$ onde $y^1 = ax$, $y^2 = bx$ e $y^3 = cx$.
- (a) Se $\omega = y^1 + y^2$ calcule $T^*\omega$.
- (b) Se $\eta = y^1 \wedge y^2 + y^2 \wedge y^3 + y^3 \wedge y^1$ calcule $T^*\eta$.
- (c) Se $\Delta = y^1 \wedge y^2 \wedge y^3$ calcule $T^*\Delta$.
- (14) Seja $b \in \wedge^2((\mathbb{R}^3)^*)$. Mostre que existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $b(u, v) = T(u \wedge v)$, onde $u \wedge v$ é o produto vetorial usual.
- (15) Seja Δ uma função determinante sobre um espaço vetorial V de dimensão n (isto é, $0 \neq \Delta \in \wedge^n(V^*)$). Mostre que se W é um espaço vetorial e $\varphi : V^n \rightarrow W$ é n -linear alternada, então existe $w \in W$ tal que $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \Delta(v_1, \dots, v_n)w$.
- (16) Seja Δ uma função determinante sobre um espaço vetorial V de dimensão n . Escolha uma base (e_i) de V tal que $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$. Mostre que existe uma única função determinante Δ^* sobre V^* tal que $\Delta^*(x^1, \dots, x^n) = 1$, onde (x^i) é a base dual de (e_i) e que Δ^* não depende da escolha desta base.
- (17) Mostre que se $\omega \in \wedge^k(V^*)$, então existe uma única $\bar{\omega} : \wedge^k(V) \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que $\omega(v_1, \dots, v_n) = \bar{\omega}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$. Mostre também que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \wedge^k(V^*) & \rightarrow & \wedge^k(V)^* \\ \omega & \mapsto & \bar{\omega} \end{array}$$

é um isomorfismo.

- (18) Se $\omega \in \wedge^k(V^*)$, defina a *contração de ω na direção $a \in V$* por

$$i_a(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(a, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

- (a) Mostre que $i_a : \wedge^k(V^*) \rightarrow \wedge^{k-1}(V^*)$ é linear.
- (b) Se (e_i) é uma base de V e (x^i) é sua base dual, calcule $i_{e_j}(x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_k})$ para $I = (i_1, \dots, i_k) \in C_{n,k}$.
- (19) Dizemos que $\omega \in \wedge^k(V^*)$ é *decomponível* se existem $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$ tais que $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$. Dizemos que ω é *indecomponível* se não for decomponível.

- (a) Mostre que toda k -forma linear em \mathbb{R}^3 é decomponível.
 (b) Mostre que $x^1 \wedge x^2 + x^3 \wedge x^4$ é uma 2-forma indecomponível do \mathbb{R}^4 .

(20) Seja $\Delta \in \bigwedge^n(V^*)$ uma função determinante.

- (a) Mostre que a aplicação $\varphi : V \rightarrow \bigwedge^{n-1}(V^*)$ definida por

$$\varphi_a = \varphi(a) = i_a(\Delta)$$

é um isomorfismo.

- (b) Mostre que $\varphi_a(v_1, \dots, v_{n-1}) = (-1)^{n+1} \cdot \omega_a(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1})$.

(21) Mostre que toda $(n-1)$ -forma é decomponível. (Utilize (20.a))

(22) Sejam $a^1, a^2, \dots, a^{n-1}, x \in V^*$. Mostre que

$$\begin{aligned} (x+a^1) \wedge (x+a^2) \wedge \dots \wedge (x+a^{n-1}) &= x \wedge a^2 \wedge \dots \wedge a^{n-1} + a^1 \wedge x \wedge \dots \wedge a^{n-1} + \dots + a^1 \wedge \dots \wedge a^{n-2} \wedge x \\ &\quad + a^1 \wedge a^2 \wedge \dots \wedge a^{n-1} \end{aligned}$$

(23) Utilize (22) para dar outra demonstração de (21).

(24) Considere as coordenadas usuais (y^i) do \mathbb{R}^n . Sejam $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$ e $T : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por $T(v) = (\omega^1(v), \dots, \omega^k(v))$. Mostre que

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = (y^1 \wedge \dots \wedge y^k)(T(v_1), \dots, T(v_k)).$$

(25) Seja $T : V \rightarrow W$ linear. Fixe uma base (y^j) de W^* . Se $T(v) = \sum \omega^i(v) f_i$ onde f_i é dual de (y^j) , mostre que $T^*(y^{i_1} \wedge \dots \wedge y^{i_k}) = \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}$.

(26) Sejam (e_i) a base canônica do \mathbb{R}^4 e (x^i) sua base dual. Sejam também $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1, 0)$ e $v_4 = (1, 1, 1, 1)$.

- (a) Calcule $A(v_1, v_2)$ e $V(v_1, v_2, v_3)$.
 (b) Determine as coordenadas (a_{ij}) de $v_3 \wedge v_4$ na base $(e_i \wedge e_j)_{i < j}$.
 (c) Verifique que $A(v_3, v_4)^2 = \sum_{i < j} a_{ij}^2 = \|v_3 \wedge v_4\|^2$.

(27) Considere no \mathbb{R}^3 a função determinante usual Δ e, para cada $a \in \mathbb{R}^3$, sejam $\omega_a \in (\mathbb{R}^3)^*$ e $\varphi_a \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$ definidas nos exercícios (3) e (20), respectivamente. Mostre que:

(a) $\omega_a \wedge \omega_b = \varphi_{a \wedge b}$.

(b) $\omega_a \wedge \varphi_b = \langle a, b \rangle \Delta$.

(28) Mostre que o quadrado da área de um paralelogramo determinado por dois vetores no \mathbb{R}^3 é igual à soma do quadrado das áreas dos paralelogramos projetados nos três planos coordenados.

(29) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear anti-simétrica defina a 2-forma $\eta(u, v) = \langle T(u), v \rangle$. Pelo exercício 20 existe um vetor $\omega \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi_\omega = \eta$. Mostre que $T(v) = \omega \wedge v$. O vetor ω é chamado de *vetor de Darboux*.